



Imprimatur,

Edmundo Boldero PROCANCELLARIO.
Pet. Gunning Præfect. Coll. S. *Johan.*
Jo. Pearson Mag. Coll. S. *Trin.*

Martii 22. 166 8/9.



LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:

In quibus

PHÆNOMENΩN OPTICORUM

Genuinæ *Rationes* investigantur, ac exponuntur:

E T

Generalia Curvarum Linearum *Symptomata declarantur.*

Auctore ISAACO BARROW,

Collegii *S S. Trinitatis* in Academia *Cantab.* Præfecto, Et *SOCIETATIS REGIÆ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub.

Ἀρχεῖ, εἰ τὰ μὲν οὐ χεῖρον. Arist.

LONDINI,

Typis *Guilielmi Godbid*, & prostant venales apud *Robertum Scott*, in vico **Little-Britain.** 1674.

SPECTATISSIMIS VIRIS

ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK

ARMIGERIS;

HAS, à VENERABILI VIRO *HENRICO LUCAS* inſtitutæ atque dotatæ, ab ipſis verò optimâ fide, ſummâque prudentiâ adminiſtratæ & conſtitutæ in ACADEMIA CANTABRIGIENSI, PROFESSIONIS MATHEMATICÆ primitias, gratitudinis ac obſervantiæ ergò, devovet

Iſaac Barrow.

Benevolo Lectori.



E Lectionibus his (quas jam quodammodò poſthumas accipis) ſeptem, unâ ſepoſitâ, poſtremas Opticis illis, quæ nuper editæ proſtant, Comitis & quaſi Mantiſſas deſtinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejuſmodi quiſquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominùs è re ſua fore cenſeret Librarius ab iſtis divulſas has ſeorſum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ ſpeciem aliquam (ut ea nempe rejectanei Schediaſmatis molem tranſcenderet) aliud quidpiam ſuppeditari cuperet; ejus (haud gravatìm non dixero) votis obſecundans, adjeci Lectiones priores quinque; ſubſequentibus illis materiâ agnatas, & quaſi cohærentes; quas ſcilicet ante aliquot annos

ut

ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum decceret; Enimverò crassiùs & ἐπιπολαιότερον scriptæ sunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, *quibus accommodatæ sunt, usum, captúmve jacens. quapropter harum rerum peritos obtestor, ut ab iis prorsus abstineant oculos, vel ut veniam saltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi septem conspectui tuo lubentiùs expono, nonnulla sperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inspicere. Ultimam* amicus *(vir sanè cum primis probus, ast in hujusmodi negotiis* Flagitator improbus*) extorsit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet suo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorsum tendant, facilè singularum initia delibans edoceberis; ut non sit cur te longiùs morer aut detineam.* Vale.

Epistola ad LECTOREM.

Benigne Lector,



Inimè tibi destinatum hoc quicquid est opellæ, statim ipse, modò digneris inspicere, multis ab indiciis deprehendes; nec tamen ut juris id tui fieret, defuerunt auctores. quibus tandem, animo certè trepidans atque renitens, idcircò præsertim obsequutus sum, quoniam in hoc, quod ipsé primus obiêrim, munus successuris exemplo præire rem literariàm; si minùs effectu, saltem conatu promovendi, non inhonesta, nec ab officio meo aliena videbatur ambitio. accessit tenuis spes inessé bonæ frugis non-nihil, quod & aliquatenus tibi prosit, nec omnino displiceat. Memineris autem obtestor qui in his literis provectior es, quale scriptum attrectas; non utique tibi soli elaboratum; non sponte productum; non diuturnâ meditatione subactos exhibens feriantis ingenii conceptus; at Lectiones Scholasticas; *primùm officii necessitate expressas; tum subinde properantiùs effusas, ut absolveretur pensum, ac hora deflueret; demùm ad promiscui literarii populi instructionem comparatas, cujus intererat complura (qualia tibi videbuntur) leviora non prætermitti; ut frustrà futurus sis (id quod te monitum oportuit, nè multùm expectando tibi pariter obsis, ac mihi) accuratum hìc quicquam, affabrè positum, aut concinnè digestum sperans. Enimverò, quò tibi satisfacerem, expediret scio multa detruncare, meliora substituere, pleraque transponere, omnia ad incudem limámque revocare; quæ tamen adniti, nec stomachi mei, nec otii fuit; sed nec facultatis exequi. in puris itaque naturalibus (quod aiunt) & prout nata sunt emittere malui; quàm operosè lambendo aliam in formam, nec ipsam placituram refingere. quinimò postquam edendi propositum inii, seu fastidio correptus seu novandi subiturum studium fugitans, nè quidem horum magnam partem relegere sustinui; verùm, quod tenellæ matres*

facti-

factitant, â me depulſum partum amicorum haud-recuſantium nutriciæ curæ commiſi, prout ipſis viſum eſſet, educandum aut exponendum. quorum unus (ipſos enim honeſtum duco nominatim agnoſcere) D. Iſaacus Newtonus, *collega noſter (peregregiæ vir indolis ac inſignis peritiæ) exemplar reviſit, aliqua corrigenda monens, ſed & de ſuo nonnulla penu ſuggerens, quæ naſtris alicubi cum laude innexa cernes. alter (quem noſtræ gentis haud immeritò* Merſennum *dixero, cùm ſuâ tum aliorum operâ provehendis hiſce literis natum)* D. Joh. Collinſius, *ingente ſuo cum labore editionem procuravit. Poſſem jam alios expectationi tuæ obices ponere, ſeu veniæ conciliatrices cauſas obtendere (meam ingenii tenuitatem, experimentorum inopiam, alias intercurrentes curas) niſi* Catonis *ſenioris mordaculum illud in me ſubvererer recaſurum:* Rectè ſi Amphictyonum decreto conſtrictus hæc evulgas. *Hujuſmodi ſaltem præloquium partim æquitas exegit, partim in fœtum proprium* ϛοργὴ *quædam elicuit, ut excuſatior is, ac à cenſura munitior prodiret. ſin acrior ſis, nec hæc aure dextrâ admittere velis, pro tuo (per me licet) ingenio facias, quantumvìs ſtrenuè reprehendas.*

Epiſtola;

Epiſtola; in qua Operis hujus Argumentum, & ſcopus brevitèr exponuntur.

PErcontaris (amice cum primis chariſſimè) quid in Lectionibus iſtis jam prælo ſubditis præſtiterim, aut præſtare voluerim. reſponſo facilè defungi poſſem, ea dicendo præſtita videri, quæ ſingularum initia pollicentur, è quibus inſequentium methodus, materiâ, ſcopus conſtare poterunt ipsâ delibanti. verùm in ſummam, opinor, iſta contrahi vis, & ſub unum aſpectum redigi. id quidem ægrè poſſum, niſi (quod juxtà faſtidioſum ac longum eſſet) complura *Theoremata* recitando; ſed utcunque morem tibi geram, rerum capita ſuccinctè perſtringens. Generatim eò connitor, ut illam, quam tractandam ſuſcipio, *Opticæ* partem aliquatenùs promoveam, ejus imprimìs principia explicando; tum ab ipſis *Utilia Conſectaria* deducendo; demùm præcipuos (quos animadverteram) defectus ſupplendo, nec non *vulgatos errores* corrigendo. huc collimans, ſpeciatim primò receptas hypotheſes ad examen revoco, quatenus admittendæ ſunt & quomodò rectiùs intelligendæ edocere ſtudens; tum è phyſicis uerisſimilibus cauſis ipſas eliciens ac aſtruens. quâ in parte mihi fidei multum attribui nolim; quæ probabiliora mihi viſa protuli, neutiquam verò talia, quibus ipſe magnopere confidam. valeant quantum valere poſſunt. Saltem hypotheſes ipſas admitti peto, ceu experientiæ conſentaneas, nec à ratione quaquàm abhorrentes. Hypotheſibus conſtitutis, ab iis proximè generalia

quædam *Theoremata* derivo, partim ab aliis agnita (quæ methodi gratiâ, & propter aliorum probationem, meis demonſtrationibus firmata appono) partim à me obſervata. dein ad ſpecialia progredior, id mihi negotii ſumens, ut *Catoptricæ*, ac *Dioptricæ* utriuſque, in uſu maximè poſitæ (*planæ* ſcilicet & *Sphæricæ*) potiſſima pertractem. *In Catoptrica Sphærica* (ſiquidem plana jam olim verè ſatìs, ac fusè exculta habetur) ejuſmodi *Theoremata* propono, de quibus reflexorum radiorum interſectiones atque limites innoteſcunt; unáque punctorum tam à longè, quàm è propinquo radiantium imagines, & apparentes loci determinantur; reſpectu oculi nedum in radiationis axe, ſed extra ipſum ubicunque conſtituti. quæ certè vel nuſquam (quod ſciam) aut magnâ ex parte perperàm alibi tractata proſtant; id quod, incidentèr aliorum refutans ſententias, cùm ratiociniis perſpicuis, tum experimentis decretoriis evictum eo. *Dioptricam* porrò tam *planam quàm Sphæricam*, refractionis noviſſimâ præſtratâ lege vel hypotheſi (quam *illuſtris Carteſius* detexit, at plerique, reor, meliores *Optici* jam amplexantur; quam & propter aſſignatas alicubi rationes veritati conſonam judico) velut à fundamentis extruo. nec enim eorum, qui principium illud admiſerunt, ipſum hactenus quiſquam (in ſcriptis intelligo quæ viderim luci commendatis) huc applicuit. Hîc autem imprimìs puncta radiantia longè diſſita (ſeu quaſi parallelos emittentia radios) conſiderans, quo pacto ab ipſis profluentes radii detorquentur exquiro, *Theoremata* quædam eliciens, è quibus præcipua *refractorum ſymptomata* liquent, ipſorum interſectiones ac limites dignoſcuntur; apparentia denique punctorum objectorum loca deſignantur, tam oculi reſpectu qui in axe, quàm ejus qui uſpiam extra axem collocatur. tunc eadem attento quoad puncta ſenſibiliter vicina, ſeu divergentibus radiis allucentia. ſub extremum, quò paratior ſit horum uſus,

punctorum

punctorum per omnigenas lentes translucentium imagines ſingillatim exhibeo determinatas. Hiſce qualitercunque confectis, de magnitudinum dijudicandis (iſtis nempe, quæ hujuſmodi conſequuntur inflectiones) apparentiis nonnulla generatim attingo; tum poſteà ſpecialiùs ac uberiùs planorum objectorum imagines quales ſunt, & quomodò deſignandæ commonſtro. ab indè receptui cano. Memoratis autem hiſce paſſim alia πάρεργα interſpergo; de quibus tu videris, nam ego malim reticere.



Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc subjungitur interpretatio.

$A + B$. *hoc est*	A & B *simul acceptæ.*
$A - B$.	A, *demptâ* B.
$A -: B$.	*differentia ipsarum* A, & B.
$A \times B$.	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$ —	A *divisa per* B, *vel applicata ad* B.
$A = B$.	A *æquatur ipsi* B.
$A \sqsubset B$.	A *major est quàm* B.
$A \sqsupset B$	A *minor est quàm* B.
$A . B :: C . D$	A *ad* B *eandem rationem habet, quam* C *ad* D.
$A, B, C, D \div\!\!\div$.	A, B, C, D *sunt continuè proportionales.*
$A . B \sqsubset C . D$.	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B \sqsupset C . D$.	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B + C . D$ $=$ / $\sqsubset$ / $\sqsupset$ M.N.	*Rationes* A ad B, & C ad D *compositæ* { *adæquant* / *excedunt* / *deficiunt a* } *ratione* M ad N.
Aq.	*Quadratum ex* A.
$\sqrt{A}$.	*Latus, vel radix quadrata ipsius* A.
Ac.	*Cubus ex* A.
$\sqrt{Aq + Bq}$.	*Latus compositi ex* Aq & Bq.

Reliquas, si quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præsertim in analysi tantillùm versatus.

Lect. I.

I. PRæfatorio jam vinculo ſolutus, & ſcopulum prætervectus Rhetoricum, ad muneris mei proprium opus accingor. Imprimis autem novi quod interim conſilii rationem, paucis expediam. Cùm prius inſtitutum urgens adverterim, occurrere pleraque nimiam attentionem deſiderantia, nec ex improviſo auſcultantibus, indè ſatis opportuna; incommodum etiam illud à puram Geometriam attrectantibus haud poſſe declinari; conſtitui, derelictâ tantiſper iſtâ, protinus in amæniores (floribus nempe Phyſicis depictos, & fructibus conſitos Mechanicis) mixtæ quam appellitant Matheſeos Campos deviare; Opticæ nimirum, Mechanicæ, Coſmographiæ, reliquæ cujuſcunque, prout occaſio feret, & commodum videbitur. Neque tamen animus erit ullius ex his longè diffuſa latifundia pervagari, vel extremos fines circumire; ſed ad ejus quaſi metropolim è veſtigio rectà procedere; primas tantùm hypotheſes excutere, præcipuáque (quibus illa tam vaſta theorematum moles incumbit) fundamenta denudare; tum verò nonnulla, palmaria quidem illa, ſtatim emergentia corollaria ſubtexere. Quorum certè σκέψις jucunda præſertim, utilis, & fructuoſa videri poteſt; quum è principiis rectè poſitis, probéque perceptis reliquorum & firma fides, & facilis comprehenſio ſubnaſcantur.

Præceſſerat anteloquium occaſioni, quæ fuit, adaptatum.

II. Ab Optica ſumemus exordium; ſcientia cum primis Nobili; quam cùm peculiaris amænitas, tum ingens commendat utilitas. Nam Naturæ ſimul detegendis arcanis, ac explicandis Phænomenis minimè vos latet quantopere conducat; neque minùs ad Aſtronomicas rationes quàm planè neceſſaria ſit; ut Perſpectivam, Picturam, & his agnatas alias eximias Artes taceam, quæ totæ quantæ quantæ ſunt ab ea pendent, ac principia ſua mutuantur. Ut & prætercam qualia, certè vix pretio

ſuo æſtimanda, ad vitæ communis uſum beneficia ſubminiſtret; viſûs imperfectionibus & vitiis tam prompta, quàm certa, minimi ſumptûs, & nullius periculi remedia conferendo. Neque, quum curioſiſſimus iſte ſenſus noſter ità varias indies, ità miras rerum ſpecies exhibeat nobis; non admodum oblectare nos, non eximiâ voluptate mentes noſtras afficere poſſit, unde talis emergat apparentiarum diverſitas, & quis ſit illas attingendi modus nedum accuratè, certóque cognoſcere, ſed utcunque veriſimilitèr arbitrari; præſertim quum in nullâ parte noſtri, nec in tota fortaſſis rerum compage, neceſſitatibus, commodis, & voluptatibus noſtris proſpicientis melioris naturæ ſeu fines agendi, ſeu modos pleniùs queamus perſpicere; nuſquam adeò diſtinctiùs aut apertiùs opificis πανσόφε eluceat artificium. Verùm elogia pertexere non vacat, aut convenit nobis. Rem potiùs ipſam aggrediamur.

III. Quæ circa viſum occupatur diſciplina communiter in tria membra diſpertitur; primum, quod viſus directis radiis objecta cernentis affectiones conſiderat (hoc ſpeciatim Optice nominatur;) alterum, quod è radiorum ab opacis corporibus repercuſſu oriundas ſpeculatur apparentias (cui Catoptricæ nomen inditum;) tertium denique, quod ideò Dioptrica vocitatur, quia cauſas inveſtigat, aut exponit eorum quæ à radiis apparent per diverſa media tranſlucentibus, & eorum occurſu demutatis Quam diſtributionem ut non improbamus, ità nobis haud obſervandam proponimus; nedum quia multa pariter his communia ſunt, at præcipuè quia viſio quævis, ut libet ſimplex ac directa, ſicuti reverà non abſque nonnulla radiorum inflectione peragitur, ità nec eâ ſeclusâ penitus intelligi poteſt aut explicari. Igitur hujuſmodi methodo potiùs inſiſtendum cenſemus; ut nempe primò viſionis cauſas (quæ ſcilicet illam extrinſecus efficiunt, aut afficiunt) examinemus; tum ut videndi modum (hoc eſt quo pacto ſenſus hic noſter idoneis organis inſtructus iſtis concurrentibus cauſis, objectorum illas, quas experimur, differentias apprehendit) adnitamur exponere; dehinc, ut Phænomena quædam ſelectiora ſuſcipiamus elucidanda; poſtremóque forſan, ut de viſûs remediis ac ſubſidiis aliquid ſubjungamus.

IV. Viſionis cauſas externas quod attinet, nemini jam dubium eſt, exiſtimo, non ullâ (quanquam *Empedocli*, *Platoni*, *Euclidi*, veteribus aliis id placitum erat) ab oculo radiorum emiſſione, verùm ab objectis defluente re quâpiam, oculoſque percellente viſum effici; quod &

Democrito

Democrito jam olim, ejúſque ſequaci (dicam an ſimio?) ſuboluerat *Epicuro*. Quod ſanè malim adſumere, vel ſupponere, quam poſt tot alios operoſo niſu comprobare. Certè (quo breviſſimè tangam hanc quæſtionem) ſic in alia qualibet evenit ſenſione, (quidni pariter in viſu?) non ut ſenſus in objecta feratur, ſed ut ipſa ſe ſenſibus imprimant; immediato nempe contactu, vel medii cujuſdam ſeu projecti, ſeu commoti interventu. Tum ratio vetat, ut ex ocello quicquam in immenſam adeò circumquaque diſtantiam credamus emanare; neque quod ſic emanet in eo quidpiam aptum natum deprehendimus. Totus enimverò pellucidis humoribus aut membranulis conſtat opacis, ad tranſmittendam lucem, vel ad eam excipiendam, aptiſſimè, ſed ad progignendam à ſe vel ejaculandam haudquaquam comparatis. Quòd ſi lucem ipſe profunderet, inſitíſque radiis attingeret objecta, quidni denſiſſimis in tenebris hoc præſertim faceret, & feles vel (Hiſtoricis ſi placet) *Tiberii* fieremus omnes? Quæ, dico, lucis externæ tam indiſpenſabilis ad viſum neceſſitas eſſet? συναυγῆας equidem Platonicæ. Sonum audio, vim non capio. Demum ab objectis, etiam à tergo ſitis, circumfuſas ſpecies quas vocant, ad oculos deportari, ſuíque perceptionem efficere, cùm à ſpeculis, tum ab aliis innumeris perquam obviis experimentis compertum habetur; illarum igitur efficaciæ quidni commodiſſimè viſionem adſcribamus? ſatìs hæc illam quam adſumimus vulgarem jam hypotheſin adſtruunt, quam & totus dicendorum tenor luculentè confirmabit.

V. Cùm verò multa viſum afficiant diverſimode, puta lux, lumen, dies, crepuſculum, colores, rerum imagines, phaſmata; nec tamen abſque luce. (Præſente nimirum aut prævia) quidvis horum aliquid peragat, perſpicuum eſt lucis hìc præcipuas partes, primariam efficaciam fore. Quinimo rem ſedulò penſitantes, eò deveniemus, opinor, ut varias his omnibus adnexas apparentias non aliunde quàm ex diverſimodâ lucis unius operatione putemus proficiſci. Cùm nempe lux ſit illud quicquid ſit quod à corpore lucido (quale ſtella, ignis, flamma) proveniens immediatè viſum afficit, lumen nil videtur aliud quàm lux in corpuſcula quædam opaca (ſeu lucem non penitùs excipientia) τῷ ἀέρι χύοντι interſperſa impingens, nec non ab iis in omnes undique partes reſiliens; quæ ſcilicet in oculum itineri ſuo expoſitum tumultuariè delapſa confuſam quandam apparentiam excitat; quàm, ſi fortior ſit, eique prorogandæ lucens præſtò ſit, appellamus diem; at ſi debilior fuerit, ejúſque fons abſceſſerit, crepuſculum dicimus. Etiam color nil fermè videtur aliud, quàm lux à corporibus quibus occurrit

majusculis, & aliquatenus stabilem suarum partium situm retinentibus (pro varia particularum, è quibus illa componuntur, figura, dispositione, textura, hoc vel illo modo) detorta vel utcunque repercussa; nimirum ut ejusmodi corporibus illapsa lux vel motu suo, vel agendi virtute, vel ipsâ quantitate suâ (quoad raritatem intelligo, vel densitatem; radiorum copiam, aut paucitatem) talis evadat, & pro modi discrimine dispares procreet apparentias, à quibus eam variis colorum nominibus insignimus. Imagines autem nil planè sunt aliud, quum lux ab objectis ità reflexa, vel refracta, ut rursus in unum locum, talémque recolligatur situm, qualem tunc obtinuit, quum ab originali proflueret objecto; directóque versus oculum itinere procederet; quo fit ut similiter objecta, sed tanquam alibi collocata repræsentent. Phasmata denique sunt imaginum quasi colores, pro lucis diversa media trajicientis alia ac alia quoad motum, vim, quantitatem affectione diversa variati. Crassiusculè jam ista proponimus; quorum forsan aliqua saltem in dicendorum progressu magis elucescent.

VI. Cùm itáque lux in visione peragenda, diversisque procreandis apparentiis ità quasi paginam utramque faciat; Et reverà præter illam nil aliud sensum ingredi, vel commovere videatur; de illa primò dispiciendum venit. Et ejusce quidem de natura à Physicis magnoperè desceptatur; an puta sit corporea quædam substantia, an qualitas; an actio tantùm, aut motus quidam; de productione quoque consequentèr ejusdem, & propagatione disquiritur, utrùm continuo per medium transitu, vel medii duntaxat impulsu, vel suâ ipsius multiplicatione quâdam huc propagetur; quales ego quæstiones curiosè non eventilabo. Quod istam saltem sententiam attinet, quæ lucem accidentium classi accenset; quando veris corporeis effectibus (quales sunt rectâ progredi, repercuti, refringi, calorem excitare, sensum afficere) veræ subsistentes causæ, veri locales motus assignari debeant; neque quomodò meræ qualitati, vel accidenti cuipiam ista competant intelligere mihi datum sit; quinetiam quo sese pacto multiplicare valeat, id genus entium, quâ ratione vim ullam exerere, cùm è cordatioribus & rerum intima perscrutantibus Philosophis haud pauci se parùm capere profiteantur; eam haud dubitem hic missam facere. Verùm an corporeæ quædam ἀπόῤῥοιαι, de lucidi corporis visceribus emanántes, totúmque nobis & ipsi interjectum spatium quàm pernicissimè transcurrentes lucem constituant; vel an illa potiùs nihil sit aliud quàm ipsius lucentis actio, contigua sibi corpora prementis ac impellentis, iisque mediantibus alia quæ adjacent; tum & horum intercessu rursus alia proximè succedentia;

cedentia; nec non ità perpetuâ deinceps ad nos deductâ ſerie; vix auſim certè mihi dijudicandum accipere; adeò paribus utraque pars argumentis niti videtur, æquis utraque difficultatibus urgeri. Quin eò fere propendeo, ut cenſeam utroque ſubinde modo lucem procreari, tam per effluvia corporea, quàm per continuum impulſum; ſatiúſque fore nonnullos ejus effectus huic, alios illi tribuere. Sanè cùm ad quantum intervallum undiquaque protenſum exiguæ lampadis flammula ſe vividè conſpiciendam præbeat, adeò quidem ut integrum ejus radiatione circumpoſitum medium perfundi complerique videatur, animadverto; quomodo tantillum corpus tali tamdiu ſuppeditandæ profluviorum copiæ par ſit; quomodo dum ea profundit non ipſum pluſquam exhauriatur, & confeſtim evaneſcat, haud facile capio. Cùm verò rurſus lucis inflectiones, illáſque qui conſequuntur effectus cogito, vix animo meo nudus impulſus facit ſatis. Itaque mentis anxius hæreo. Veruntamen quia de natura lucis aliquid præſternam expedit, iis quas mox tradam hypotheſibus nonnihil explicandis congruum; hoc ſe modo, vel non abſimili rem habere concipio.

VII. Pono corpus omne lucidum, ut tale, congeriem eſſe quandam corpuſculorum ultrà pene quàm cogitari poteſt minutorum & exilium; horum autem unumquodque vehementiſſimo motu percitum, aliquò (ſecundum legem iſtam naturæ ſatìs receptam & exploratam) rectà tendere; tum medium circumſtare, fluidum quoque (cujus nempe partes nullo colligatæ nexu quaquaverſùm liberè feruntur) è corporibus aggregatum, exiliſſimis quidem & illis, aſt priorum reſpectu bene craſſis & ſolidis; ità tamen ut hoc meatus habeat, & interſtitia tenuioribus illis admittendis opportuna; quin & horum craſſiorum corpuſculorum occurſu progreſſum impediri multorum ex illis, quæ in lucidi ſuperficie verſantur, aut ab ea ruunt corpuſculis; ut neceſſe ſit iis ſic inhibitis, atque repulſis introrſum ſe recipere, quo fit ut dicta congeries (aliis etiam in eam aliunde confluentibus ejuſdem naturæ corpuſculis) aliquatenus intra ſuos cancellos reſtringatur, nec toto ſtatim in auras expanſa diſſipetur. Interim verò complura per dictos canales repertâ viâ curſum ſuum rectà continuare, materiam inibi deprehenſam haud ità fortiter obſiſtentem in fugam agentia, & ante ſe protrudentia; quorum veſtigiis alia de lucido corpore ſimiliter prodeuntia prorſus inſiſtent, longúmque ſimul omnia lucis rivulum efficient, indeflexâ ſerie procurrentem. Quin & iſtorum fortè nonnulla memoratas medii craſſiores particulas impetu ferire tam prævalido, nonnunquam ut ipſas quoque cedere cogant, & ſecum conſpirantes in directum adja-

centia, corpora propellere; quæ & pari modo proximè succedentibus vim inferent, & ità continuò, sic ut simul & semel indefinitè protensa talium corpusculorum series promoveatur, & antrorsum connitatur; qualis utrolibet modo producta lucis propago radius consuevit appellari. Ità quidem rem existimo simpliciter obtingere, donec medium permanet homogeneum, hoc est ejusdem fermè magnitudinis, soliditatis, ac figuræ partibus constans, & similibus interstitiis pervium; at si medium occurrat aliter affectum, è diversis quippe secundum quantitatem aut figuram particulis compactum, porisque laxioribus, aut strictioribus pertusum, cujúsque proinde materia vel promptiùs cedat, aut contumaciùs obluctetur, oportebit illius seu cursûs, seu impulsûs vim, effectúmque demutari; quin & si novi medii superficies ita transeunti lucis amni se obliquam objiciat, ejus quoque directionem infringi; vel ἀνάκλασιν contingere, quam *Aristoteles* vocat, eo nomine (quas nunc distinguere solemus) reflectionem simul ac refractionem complectens. Enimverò materiæ impingens ità compactæ, ut venienti transitum perneget, aut prementis impetum inconcussa sustineat, aliò tota quò facillimè poterit & directissimè, regredietur & resiliet; aliò vim suam quàm retinet omnem derivabit; id quod lucis reflectio dicitur (Hujusmodi verò corpus lucem non suscipiens eatenus opacum, (Hoc est terrenum, ut Grammatici volunt, ab Ope vocabulo prisco tellurem designante) appellatur; quatenus autem sibimet incurrentem aliò projicit, illustratum dici; quatenus objecti speciem redhibet aspicienti, speculum.) Quòd si verò materia luci progredienti sic obviàm facta transitum utcunque præbeat, ejusve conatum excipiat, lentiùs tamen aut paratiùs præ illa, per quam priùs decurrebat, tum virtutis suæ quantitate aliquantùm hinc variatâ simul à recto quod affectabat itinere deflectetur; eo nimirum ordine modóque quem posthac conabimur elicere. Qualis effectus refractionis nomine venire solet (subnotetur autem, hoc modo lucem intromittens medium eatenus perspicuum, diaphanum, transparens, pellucidum appellari.) Ità lucis naturam, originem, propagationem, ac progressum ὁλοσχερῶς (omissis quæ adjungi possent plerisque minùs ad nostrum propositum spectantibus) expono; nec aliud ferè præter hæc requiro declarandis hypothesibus, quos communiter adsumunt Optici; quæque necessariò debent huic extruendæ Scientiæ præsterni. Comprobandis autem iis, quæ dixi non incumbam; cùm & (quod instituto nostro satis est) talia dari posse non minùs ipsâ luce clarum videatur, imò reverà dari complura declarent experimenta. Opticas verò quas innui hypotheses præcipuas subjungemus, & nonnihil attentabimus explicare.

VIII. 1. Radii lucis (hoc est lucidi transitûs aut impulsus quales descripsimus tramites) in eodem existentes similari medio directi sunt. Hoc è dictis abunde patet. Quin indè Corollarii vice deducitur radios quoad rem ipsam, Physicéque loquendo figurà prismaticos esse, vel cylindricos. Nempe corpusculum illud quodpiam in lucidi superficie positum, à quo radius originem suam ducit, dum à primò suo loco ceu base defertur aut totâ suâ superficie contiguum sibi corpus rectà propellit, figuræ suæ (vel impulsi saltem corporis figuræ) congruum designat, super hac vel illa base constitutum, solidum longum, exile, teres, quale cylindrus, aut prisma. Proinde quando Mathematicè rem tractamus, istos radios pro rectis lineis habere possumus; tum quia reverà sunt adeò tenues & recti; tum quia plerumque pro cylindricis ejusmodi seu prismaticis figuris ipsarum axes ità sumi possunt, ut nihil indè ratiocinio Mathematico derogetur.

IX. 2. Ab omni corporis lucidi (vel illustrati) puncto ad quodvis medii (non obstaculis intercisi) punctum lucis aliquis radius dirigitur. Hæc apud Opticos tritissima suppositio quò vel intelligi vel admitti possit, omninò duplicem limitationem exigere videtur, è supra dictis utramque deducibilem. Unam, ut omnis puncti nomine nedum non præcisè punctum quodcunque Mathematicum, ac nec omnem particulam concipiamus realem & Physicam; verùm saltem admodum exiguam, qualique fermè minorem vel animo designare nequeamus; alteram ut non in unoquoque strictè dicto temporis instanti, nec in omni reali temporis portiuncula cogitemus hoc contingere, sed ut nullum temporis intervallum sentiri possit ità curtum, aut momentaneum, quin intra ipsum à quavis lucidi designabili parte designatam ad medii partem radius aliquis exporrigatur. Enimverò cùm radiorum istæ quas assignavimus radices, lucidum componentia corpuscula, sint illorum, quorum nos utcunque quantitates sensu vel animo pertingere valemus, corporum respectu tanquam infinitè parva, nec non infinità quasi pernicitate donata, non difficilè concipi potest in omni designabili, vel imaginabili lucentis spatiolo prorsus innumerabilem eorum multitudinem existere, quorum fere singula diversas in plagas tendunt; ut nulla sit designabilis plaga, quam non una quæpiam appetat, aliquam saltem, utlibèt imperceptibilis & angusti, temporis moram interponendo. In eo siquidem tempusculo lucidi partes singulas innumera successivè talia corpuscula subingrediuntur juxtà deserúntque, de quibus mirum fuerit ni quoddam unum ad designatum medii spatium tendat, sibi transmittendo meatuum aliquem (quos & pari ratione tanquam

quam

quam infinitos ſupponere fas eſt) idoneum reperiens. Ità vulgare pronunciatum interpretor; id quod aliàs rigidè ſumptum haud verum duco. Nec enim idem corpus eodem temporis puncto diverſas in partes contendere, vel adniti; ſed nec eandem præciſè medii partem è diverſis locis accedentes corporum motus excipere quiſquam conceperit, opinor, aut ego conceſſerim; non certè magìs quam idem corpus unà plures locos occupare, vel eundem locum plura ſimul corpora ſuſcipere; ad iſtum modum intellecta dicta ſuppoſitio totam unà cum radiis lucidis naturam, omnem, ut mihi videtur, Phyſicam permiſcebit. In noſtro rem explicandi modo nihil durius obverſari video, quàm ut hinc divinæ potentiæ, ſapientiæque vis magìs eluceſcat, in luce ſic efformanda, tam ejus effectricibus particulis admirabilem exilitatem, incomprehenſibilemque velocitatem impertiendo, quæ prorſus ei neceſſariæ fuerunt, ut ſenſionem efficeret, & reliqua tam utilia ei deſtinata munia obiret. Sanè lucis corpuſculum unum ab arenula quavis litorea pluſquam eâ fortaſſis proportione ſuperatur, quâ tota quanta quanta eſt mundana moles arenulam iſtam excedit; id quod non ita cenſebit abſonum, quiſquis ad complures ſatìs obvias apparentias mentem adverterit.

Subnotandum eſt porrò duas has fundamentales hypotheſes, ſic acceptas, innumeris admodum familiaribus experimentis confirmari. Quovis enim in loco ubicunque collocati objecti lucentis vel illuſtrati quæcunque deſignabilis particula conſpicitur oculo, repræſentatur in ſpeculo, modò nihil objiciatur ab eo rectâ delabentes radios intercludens; eadem verò ſtatim oculo ſubducitur, & penitus obumbratur, ſi quid opaci corporis directum intercipiens radiorum iter obtendatur. Etiam foramen utcunque tantillum ſufficit trajiciendis radiis quibus tota quantitis objecti facies obverſa depingatur. Et porrò quam nullà poſſit apprehendi tam exigua lucidi pars, à qua non lux ad oculum defluit, perſpiciliorum uſus apertiſſimè monſtrat. At pergo.

X. 3. Lucis radius quilibet alteri medio perpendiculariter incurrens, aut rectà progreditur, ſiquidem cedente medio procedere valet, aut in partes directè contrarias (hoc eſt in ſe, vel in ſuam retro ſemitam) repellitur. Experientiâ firmatur hæc hypotheſis; & rationi quoque conſentanea eſt; nec enim ulla poteſt excogitari cauſa, cur in unas potiùs quàm in alias partes deflectatur; igitur in nullas. Quinimò ſi verum ſit omne patiens, aut percuſſum vim inferenti poſitivâ quâdam vi repugnare, perſpicuum videtur eò reſiſtentiam dirigi, unde vis ingruebat; ejúſque conſequenter effectum abſolutè loquendo, tantùm illic deprehendi.

deprehendi. Quod sanè mihi tam verum apparet, ut non dubitem hanc ipsam hypothesin ad omnimodos incursus extendere; seu generatim effari, quod pulsus omnis & motus, utcunque medio culibet impingens, directè (per se nimirum, propriè, distinctéque rem æstimando) continuatur, aut prorsum aut retrorsum. Scilicet, exempli causâ, si duo baculi A B Y Z, C D Y Z in idem medium E F (illud perpendiculariter, hoc obliquè) uniformi quâdam pressione vel impetu adigantur, existimo medii cessione vel resistentiâ totam (quâ baculus obliquus fertur, aut medium impellit) vim æquè rectâ semitâ antrorsum versus I K, vel retrò versus C D derivari, ac perpendicularis ipsius impetus in G H progreditur, aut regreditur in A B. Quod enim nonnulli putant medii superficiem baculi perpendicularis tendentiæ magìs opponi, quam obliqui, proindéque perpendicularis impulsum rectà continuari, sed obliquum alio detorqueri; vel assertionem ipsam non agnosco, vel non admitto consequentiam. Enimverò si per illud opponi nil aliud volunt quàm realiter objici, seu obstare rectà pergenti, non minùs eo modo superficies E F opponitur baculo C D, quàm ipsi A B; rectum enim ejus progressum pariter intercipit, impedit, demutat. Verùm si quam aliam nescio quam imaginariam oppositionem intelligunt, nihil video quod huc faciat indè consectari. Profectò rem abstractè, nec ut accidentarium quid immisceamus, expendendo, nihil attinet ullam medii partem considerare præter illam, ad quam corpus progrediens aut propellens ei occurrit; hæc enim sola resistendo quicquam efficit, aut cedendo. Quare per rectam D Z progredienti impulsui solum punctum Z opponitur; perindéque fuerit qualem reliqua medii superficies obtinere situm concipiatur. Punctum autem Z æquè pulsui venienti à D per rectam D Z, atque tendenti per rectam Z K versus K contrariatur, ac ei qui à B per B Z procedens iter affectat per Z H versus H. Idémque de reliquis medii punctis intelligi par est, quibus uterque baculus ipsum contingit, aut ei applicatur. Itaque reverà par utriusque pulsùs quoad oppositionem est ratio; similísque proinde utrobique resultabit effectus; pulsum nempe recto tramite vel transmittere, vel rejicere. Verùm longè secus eveniet, si baculum alterum obliquum, seu P D Y Q, cum ipso A B Y Z conferamus. Etenim superficies E F baculi A B Y Z motui, vel impulsui magìs opponitur, aut obsistit, quàm motui vel impulsui baculi PDYQ. Quoniam illi toti cum tota sui parte Y Z, huic verò tantum ex parte Y renititur; è qua discrepantia necessariò dispar effectus consequetur, ut nimirum pulsùs aut motûs directio mutetur. Quod discrimen eò lubentius adnoto, quoniam hoc arbitror modo (vel adsimili) lucis radios

Fig. 1.

dios diverso medio obliquè incidentes, velut experimur, inflecti; saltem eò spectantia lucis præcipua symptomata, tribus porrò subjiciendis hypothesibus comprehensa, vix aliâ ratione commodius explicari.

XI. 4. Omnis radii lucidi inflectio (hoc subinde generali nomine, compendii causâ, tam refractionem, quàm reflectionem complector) fit in superficie ad medii inflectentis superficiem perpendiculari, seu recta. Hujusce suppositionis haud ullam facilè satìs commodam & claram rationem reperias apud Opticos; petitione principii, vel incomprehensibili quâdam obscuritate laborat quicquid fermè eò spectans afferunt; neque valdè miror radium lucis semper ut rectam concipientibus individuam lineam id eis accidisse; quo posito vix probam ullam ejusce rei causam assignari posse credo. Cadat enim radius linearis A B in speculi (instantiæ gratiâ) plani superficiem ad punctum B; per
Fig. 2. quod utcunque ducantur duæ rectæ C D, E F; cùm igitur rectæ A B, C D sint in uno quodam plano, quidni reflectio radii peragatur in isto plano? Simili ratione quoniam rectæ A B, E F sunt in uno plano, quidni radius in hoc etiam reflectionem patiatur? eodémque planè modo quid obstat quo minùs in singulis omnibus, hoc est infinitis planis, speculi superficiem secantibus, & per rectam A B ceu communem sectionem traductis perficiatur reflectio, idémque proinde radius unus in partes undique cunctas reflexus dispergatur? cur hoc fieri non possit, utique non capio. Quod respondetur enim, posito plano A B C ad speculi superficiem recto magis illud planum, quam cætera quævis speculi superficiei contrarium esse, proindè resistentiam in eo maximam contingere, propter eáque radium in eo potissimùm inflecti, parùm satisfacit; quoniam, ut superiùs insinuatum, extra punctum ipsum B, cui radius impingit, alia nulla specularis superficiei pars meritò venit consideranda quid enim (ut hoc adjiciam prædictis) an in universam quà longè latéque distenditur, ipsius speculi superficiem agit hic linearis radius, & ab ea vicissim patitur; an in ejus definitam aliquam partem agit, patitúrque ab hac? quis in totam agere, vel à tota pati concedet? Et cur id uni parti deputandum præ aliis? ubi terminus figetur? quousque procedet operatio? quinimò potiùs, quia radii per rectam A B procurrentis impulsui tantùm id speculi quod est in recta A B versus G protracta resistit, ideò pulsus in ipsam A B rejicietur; Et nulla succurrit causa sontica, propter quam aliorsum deflectat; nihil datur, quod ejus tendentiam aliò determinet. Igitur ut aliis, quæ puto variæ assignantur, hujus effecti causis excutiendis abstineam, indè genuinam ejusce rationem (ut & generatim omnium

quæ

quæ circa radiorum inflectionem primitùs obveniunt) existimo petendam, quod lucis radius non mera sit linea, verùm dimensionibus omnimodis præditum corpus; utpote (juxta quæ præmonuimus) cylindricum aut prismaticum, pro figura corpusculi, à quo oritur. Supponatur, aliquatenus illustrandi propositi ergò, Parallelepipedum ABCDEFGH lucis radium obliquè speculo incurrentem repræsentare; cujus latus BF applicetur speculo, dum intereà reliquum ejus supra speculi planum elevatur. Impedietur ergò Parallelogramum ABFE, nè recta procedat; indè continget rectam BF aliquò supra dictum planum resilire. Verùm in allas saltem partes fiet hæc reflectio, secundum quas rectus radii progressus, quoad ejus fieri potest, quàm minimè pervertetur. Cùm enim is rectissimum cursum affectet, eum (ex indole certa, perpetuáque lege naturæ) si perfectè nequit, at tamen ut proximè consequetur. Itaque cùm inter plana latera ABDC, EFHG sibimet opposita cursus ejus anteà dirigeretur, & objecta superficies nihil jam obstet, quo minùs inter eadem plana, tametsi sursum excussus, progrediatur, admodum liquet etiamnum inter illa semitam ejus contineri; locumque seu plagam reflexionis eatenus haud perperam determinari. Cæterùm est planum ABDC, eíque oppositum EFGH speculi plano rectum; quia Parallelepipedum rectum ponitur, & ideò lateralis recta BF in speculi plano existens, planis ABDC, EFHG recta. Quocircà si totum hoc Paralleledipedum ob exilitatem suam, aut Mathematicæ computationis gratiâ, pro recta quasi linea censeatur, erit pariter & reflexus radius etiam linea recta; nec non uterque continebitur in superficie ad speculi planum recta. Non dissimili ratiocinio, si radius cylindri recti figura præditus admittatur (qualis nimirum à corpore procurrente, vel impulso producetur, id si Sphæricum fuerit) etiam radius in superficie plano speculi recta reflectionem ostendetur subire. Speculi quippe plano rectus incidat cylindrus ABDC; cujus bases AMCN, BODP, axis XZ; ità scilicet, ut basis BODP speculi planum contingat in B; reliquum ejus corpus (prout in figura depictum exhibetur) obliquè surgens supra planum emineat. Basis autem diametri BD, PO sese normaliter secent; ac per ipsam PO, & axem ductum planum efficiat in cylindro Parallelogrammum POMN. Si jam per hujusce latera MO, NP ducta concipiantur duo plana axi parallela, cylindrúmque contingentia, liquebit (ex antedictis causis pariter applicatis) totius cylindri ductum inter hæc duo plana comprehendi, radiique reflectionem inter ipsa definiri. Sunt autem hæc plana speculi plano recta. Sit enim recta GBH communis sectio circuli BODP, planíque

Fig. 3.

Fig. 4.

ſpecularis; hæc utique circulum continget; (quia ſpeculi planum, ex hypotheſi, non alibi præterquam ad B circulo occurrit, adeóque nec recta G H) quare rectæ G H, O P ſunt parallelæ. Ergo P O eſt ad ſpeculi planum parallela. Huic verò perpendicularia ſunt plana prædicta cylindrum contingentia per M O, N P ducta; axi parallela. Quapropter eadem ſpeculi plano recta erunt. Hinc, ut anteà, ſi totus radius habeatur inſtar rectæ lineæ, continget ejus reflectio velut in ſuperficie ad ſpeculum planum recta; quippe cùm ejus latitudo tota comprehendatur inter ejuſmodi duo plana; quæ proinde ſi nulla ſupponatur, in unum illa coaleſcent. Accommodari poſſent hæc cuicunque radii figuræ tali, qualem ſupra deſcripſimus, utcunque nonnulla demutando; ſed & eadem pari ratione radiorum refractionibus adaptentur. At pluribus parco.

LECT. II.

I. VIæ, quam nuper aperuimus, & aliquatenus ingreſſi ſumus, inhærentes eò jam devenimus, ut nobis incumbat proximè celebres illas hypotheſes (an Theoremata malitis appellare) radiorum inflexorum itineri penitus determinando (imaginúmque proinde locis, figuris, quantitatibus inveſtigandis, nec non apparentiarum quarumcunque cauſis explicandis) neceſſarias, experientiæ quidem bene conſonas illas, etiam aliquo rationis ſuffragio communire; præſtratis utique fundamentis, ac ſuppoſitionibus inſiſtendo. Cùm itaque lucis radio corpus adſignatum ſit figurâ priſmaticum, aut cylindricum; Et hoc quidem rectum (utpote præ reliquis ſimplex, & naturæ totas ſuas in agendo vires exerenti præſertim conveniens;) cùm & exinde progreſſus ejus eatenus fuerit definitus, ut intra ſuperficies duas planas inflectenti medio perpendiculares includatur; quas quidem abhinc (quando nullus tranſverſæ dimenſionis illius, vel intervalli ſuperficies iſtas dirimentis ad rem noſtram, illam ſaltem quam nunc attingimus ſpectans effectus, aut uſus ſit) brevitatis & perſpicuitatis causâ, velut unam habere poſſumus; adeóque jam radium ut duabus ſolummodò dimenſionibus præditum, & ad inſtar Parallelogrammi cujuſdam rectanguli, in plano ad medii inflectentis ſuperficiem recto jacentis, conſiderantes, reliquam itineris quod perſequitur determinationem, ultimam

mam illam & completam, investigabimus, ac exponemus; cujusce quidem circa reflectionem inquisitionis consectaria resultabit hæc propositio, passim ab Opticis recepta:

II. 5. *Radius incidens, & reflexus ad speculi, vel opaci reflectentis superficiem angulos constituunt æquales.* Hujus effati declarationem sic exequimur. Parallelogramum rectangulum A B C D lucis repræsentet radium obliquè plano speculo E F incidentem. (Recta scilicet E F sit communis sectio plani ad speculum recti, in quo dictum Parallelogrammum existit, & in quo, secundum præmissa, reflectio peragitur, cum plano speculi.) Cùm itaque Parallelogrammi punctum B speculo primùm impingens opaco ac impervio, recta progredi nequeat, conetur oportet (ut præstruximus) retrò versus A per ipsam rectam B A resilire. Cùm autem intereà rectæ B D supra speculum eminentis alter terminus D, nullo præpeditus obstaculo pari vehementiâ cursum quoque suum adnitatur promovere per rectam C D H; palàm videtur utriusque conatibus adversis non aliter faciliùs aut propiùs satisfieri posse, quàm si utrumque circa punctum Z rectæ B D medium rotationem concipiat. Sic enim utrumque pariter & quàm minimum à recto quem affectent cursu deflectent; siquidem rectæ B A, D C circulum B ϛ D δ tangunt, centro Z per B & D descriptum. Cùm autem hujusmodi motum circularem obeundo punctum B descripserit arcum B ϛ, & punctum D arcum D δ, hoc est quando recta B D obtinuerit situm ϛ δ, etiam ipsum punctum D speculo impinget ad δ; reditúmque proinde per arcum δ D, scilicet ipsius quoque jam intercisо cursu, molietur; Sed & nunc temporis ipsum punctum B ad ϛ positum per arcum ϛ D tendit; quorum certè motuum adversantium alter alterius effectum impediet; itáque proximo saltem, quoad fieri poterit, utrumque progressus arripient; proximi vero sunt qui per tangentes ϛα, δκ; qui & sibi nihil repugnant, at potiùs omninò secum conspirant; itaque punctum B per rectam ϛα, punctúmque D per rectam δκ procurrent, adeò ut totus radius A B D C jam acquirat situm αϛδκ; & per hanc orbitam rectà motum suum prosequatur. Liquet autem angulos ABF, κδE æquari. Nam æquantur anguli Z B δ, Z δ B; quapropter adjunctis hinc indè rectis ZBA, ϛδκ toti A B F, κ δ E pares erunt. Unde patet è duobus quoque rectis residuos A B E, κ δ F æquari; quod propositum fuit ostendere. Fig. 5.

III. Ità de præmissis suppositionibus nostris fundamentalem hanc Catoptricæ legem seu regulam elicimus, quàm verisimiliter aut concinnè

cinnè penes vos esto judicium. Non diffitebor autem aut penitus dissimulabo non esse nihil quod his objici possit, & dubitandi causam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando solum punctum B versus A renitatur, & totum lineæ B D quod superest partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipsa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potiùs ista gyratio concipiatur peragenda? Respondeo quàm brevissimè (quoniam incitato cursu tendens ulteriùs ægrè remoras fert) id in natura constanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ sibimet adversæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus se, motúsque suos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contranisimum, atque conflictum amittere necesse habent in illas transfundentibus; quo fit ut mediis hinc indè quàm tardissimè dimotis extremæ velociùs revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque nisi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant assequi possint, id statim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obsequentur. Nè dicam in recta B D nullum aliud punctum existere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipsum mobile libretur. At pluribus abstinens ad refractionis præcipuam legem haud absimili discursu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

g. 6. IV. 6. Radii lucis alteri cuipiam dissimili perspicuo (nimirum homogeneo quoad se) incidentes ità refringuntur, ut perpetuò recti sinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales sint rectis sinubus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, stabiliendóque decreto; Parallelogrammum A B D C lucis radium repræsentans impingat planæ superficiei E F pellucidi medii (vel sit recta E F sectio communis, ut in casu præcedente, quod & abhinc semper intelligatur) progressum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium isthoc subingrediens punctum B procedere, tardiùs quidem, attentabit per rectam B G, seu peripsam A B protractam, intereà verò punctum D in primo durans medio motum suum priorem adurgebit in recta C D H Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque potest rectum motum illud tardiùs, hoc velociùs incedendo conservare) quàm proximè consequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta situm, puta quale Z, rotentur; ità scilicet ut dum punctum D in medio rariori (rarius appello quod minùs resistit, aut retardat; ut & densius quod motum magis reprimit, & tardiorem reddit) velociùs latum describit arcum majorem D δ; punctum B

tardiùs

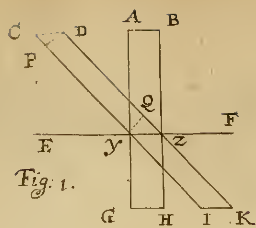
tardiùs in medio contumaciore delatum minorem arcum B ϐ delineet; quibus peractis recta B D tenebit situm ϐδ. Cùm verò jam punctum D densius quoque medium interet ad δ; proindéque pariter & ipsum retardetur; motus isti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum D velociùs feretur quàm B; nec ideò majorem ut priùs simul arcum describet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deserentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes δϰ, ϐα; radiúsque totus A B C D hoc modo detortus, & situm αϐδϰ nactus per hanc posteà semitam rectà decnrret Adnotandum est autem quæcunque sit rectæ A B ad rectam E F inclinatio arcus D δ, B ϐ (vel semidiametros Z D, Z B) eandem semper habere proportionem inter se; talem nempe, qualem in densitate, seu resistentia peculiare discrimen exigit. Etenim supponatur in quovis superficiei pellucidæ loco positum nobile punctum B; cùm medium hoc ex hypothesi sit homogeneum (hoc est ubique pariter obsistens) nulla potest, opinor assignari ratio cur hoc mobile non in quasvis partes æquâ velocitate deferri possit; nimirum æquè celeriter ad Q tendet, (impetum modò ceperit isthac dirigentem) per rectam O B Q, ac in N per rectam A B N. Adeóque radii lucidi A B, O B utcunque differenter inclinati parem omnino resistentiam invenient; punctum, inquam, B, seu versus Q, seu versus N nitatur, æqualiter, eodémque modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum D in primo medio semper eâdem, quæcunque fuerit ejus positio, celeritate promoveatur, satis apparet motus istos, aut motuum semitas eodem tempore decursas, arcus nempe circulares D δ, B ϐ semper eandem inter se proportionem servare; nimirum illam, quam habent semidiametri Z D, Z B, vel Z δ, Z B; quæ idcirco proportio, principaliter ac primariò, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem esse patet cum illa, quam habent recti sinus angulorum ipsis Z δ, Z B in triangulo Z δ B oppositorum, ipsorum scilicet Z B δ (vel Z B E) & Z δ B. Est autem angulus Z B E complementum anguli A B E, (hoc est angulus inclinationis rectæ A B ad E F) & angulus Z δ B est complementum anguli F δ ϰ, vel inclinatio rectæ δ ϰ ad eandem E F. Igitur abunde liquet propositum. Patet verò, quod in hoc casu, angulus E B Z major est angulo B δ Z; vel, ductis B M, δ N ad E F perpendicularibus, quòd angulus M B G major est angulo N δ ϰ; adeóque quòd hic refractio versus perpendicularem, quod aiunt contingit. Ac ità quidem quando radius radius in medium transit, ipsi magis obsistens, seu densiùs. At si medio incurrit faciliorem transitum præbenti, seu rariori, planè simili modo, sed inversè se res habet. Quod

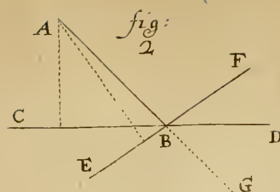
Fig. 7.

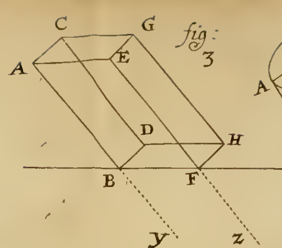
Fig. 8.

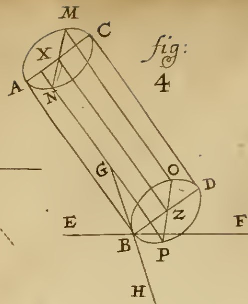
Quod (licèt breviùs) conficeretur negotium adſumendo ſicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* eſt via, ità radium de raro tranſeuntem in denſius, pérque denſius veſtigia ſua replicantem in rarum nil aliud quàm eandem ſemitam repetere; ut nempe ſi radius A B D C de raro tranſiens in denſius refringatur in $\alpha\,\beta\,\kappa\,\delta$; quòd etiam hic radius $\alpha\,\beta\,\kappa\,\delta$ è denſiori recidens in rarum viciſſim in A B D C refringetur; quia tamen aſſumptum illud non nemini demonſtrationis & ipſum indigere videatur; Et univerſim, extremóque rigore ſumptum forſan haud adeo verum ſit; majoris etiam evidentiæ cauſâ; preſertímq; demùm quoniam huic caſui nonnulla quodammodò peculiaria ſunt notatu non indigna; quin addo quia præſtare videtur effectum unumquemque propriis è cauſis deduci) ſeparatim oſtendemus. Rurſum igitur radius A B D C, quâ priùs figurâ donatus rarioris medii ſuperficiem E F incurrat. Cùm igitur punctum B velociùs procedere jam valeat quàm anteà (medio ſcilicet illapſum promptiùs cedenti) hoc eſt quàm punctum D, neceſſariò commutabitur rectus utriuſque, quem affectant, motus in ei proximum circularem, circa punctum aliquod
Fig. 9. in recta B D, puta circa Z; itâ ut Z D, Z B talem inter ſe proportionem obſervent, qualem ſingularis exigit horum in reſiſtentia mediorum diverſitas; utique ſicut in quæ præceſſerunt; cùm verò punctum B ità circumductum deſcripſerit arcum B β, & punctum D arcum D δ; puncto D ad δ tunc medium rarius ingredienti, ceſſabit iſta motuum inæqualitas; adeóque ſimul neceſſariò deſinet rotatus circa punctum Z; ambóque puncta B, D per dictorum arcuum tangentes $\beta\,\alpha$, $\delta\,\kappa$ (rectæ Z β perpendiculares) quod proximum eſt iter arripient. Rurſus autem, pariter ac in caſu præcedente, rectæ Z D, Z B (vel Z δ, Z B) proportionem exhibent, quæ refractiones hujuſmodi dimetitur; habent autem Z δ, Z B ſeipſas, ut recti ſinus angulorum Z B δ, Z δ F; hoc eſt ut ſinus inclinationis rectæ A B ad ſinum inclinationis rectæ $\delta\kappa$; quod propoſitum fuit oſtendere. Liquet autem quòd hìc ang. Z δ F major eſt angulo Z B δ, adeóque quod refractus divergit à perpendiculari.

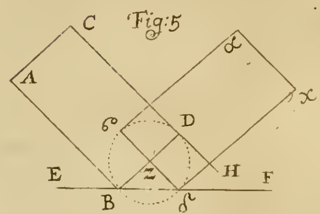
V. Advertendum eſt porrò quoad priorem hypotheſin, ſeu caſum radii de medio rariori contendentis in denſius, eum ſemper, qualiſcunq; ſit ejus obliquitas, medium denſius ſubire; & per ipſum incedere; modo commonſtrato. [Simpliciter autem hoc, & abſtractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia ſunt, opacitas perſpicuitati immiſta, figura diaphanum terminans, ejus craſſities inæqualis, aliud quid poſt poſitum diaphani reſiſtentiam promovens; cujuſmodi

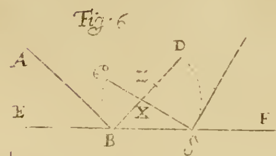

C
D
A
B
F
Q
F
E
y
z
Fig: 1.
G
H
I
K

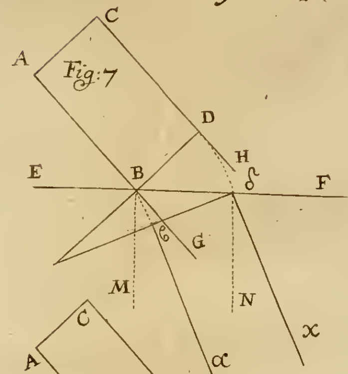

A
fig: 2
F
C
D
B
E
G

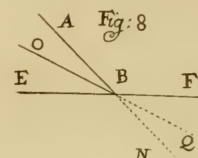

C
G
fig: 3
A
E
D
H
B
F
y
z

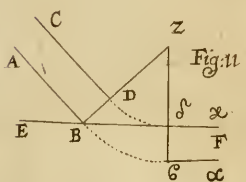

M
C
fig: 4
X
A
N
G
O
D
E
z
F
B
P
H

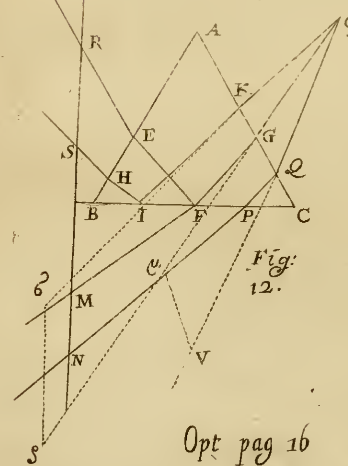

C
Fig:5
A
x
D
Z
H
E
F
B

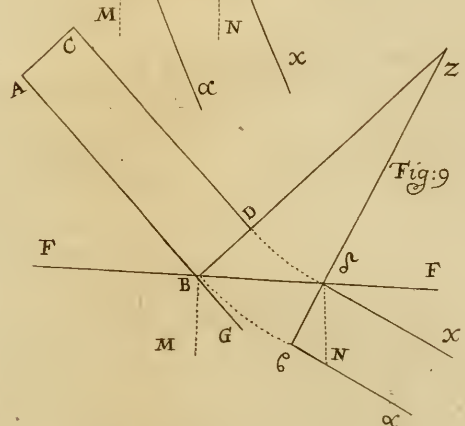

Fig:6
A
D
E
X
F
B

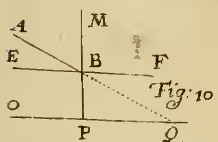

C
A
Fig:7
D
H
E
B
F
G
M
N
x


A
Fig: 8
O
E
B
F
N
Q


C
Z
A
Fig:11
D
x
E
B
F


R
A
O
K
E
G
S
H
Q
B
I
F
P
C
M
N
V
Fig: 12.


C
A
Z
Fig:9
D
F
B
F
M
G
N
x


A
M
E
B
F
Fig: 10
O
P
Q

Opt pag 16

cujuſmodi quippe de cauſis diaphanum ſubinde forſan evaſurum eſt opacum, & inſtar opaci radios valebit repercútere; ceu quando lapis in aquam impingit obliquè; cùm hydrargyro ſubſtracto vitrum munitur. Dum lapis *e. g.* obliquè impingit ſuperficiei E F (cui parallela O Q) per lineam A B; tota linea B Q ad fundum O Q protenſa venienti repugnabit, auxilii quoque nonnihil conferente fundo O Q; neque mirum fuerit, ſi major hic renitentia deprehendatur, quam ubi radius alter M B P perpendiculariùs incurrit, quando major ſit B Q, quam B P.] At nos ſecluſis iſtis medium velut interminatum, in omnes partes æqualiter reſiſtens, abſolutè perſpicuum, & radios ex ſe non reſpuens accipimus; quibus ſuppoſitis perpetuò quod dixi, radius, obliquitate quâpiam incidentiæ nil vetante, medium denſius penetrabit. Verum in alterò caſu, cùm de medio denſiori lux rarius incurrit, non ſemper ea medium hoc permeabit. Nam ſi magna ſatìs fuerit obliquitas; ſubinde radius inflexus ſupra ſuperficiem E F attolletur, angulúſque (qui dicitur) refractus, aut inflexus rectum exſuperabit; quinimò fieri poteſt ut ipſum exæquet. Sit in exemplum primò inclinatio graduum 45, vel ſemirecta; Et Z B ad Z D ſe habeat ut quadrati diameter ad ſuum latus quæ fermè proportio radiorum ex aqua in aerem tranſeuntium, experientiâ conteſtante, rationem metitur) radius velut in ipſam E F refringetur, aut eam ſtringens procedet. Eſt enim Z δ (æqualis ipſi Z D) jam ad E F perpendicularis, adeoque δ κ arcum δ D contingens ipſi E F congruet. Unde patet obiter, id quod ſuperiùs inſinuatum, non univerſim conſtare, quòd radius à quo loco medii unius in aliud proceſſit, ad eundem retrogradus accedet. Hoc enim ſaltem in caſu radius A B refringitur in ϛ α ſuperficiei media dirimenti parallelam; veruntamen qui per α ϛ progreditur minjmè recedet ad B A, nec ullam, ut manifeſtum eſt, omninò refractionem patietur. Sed hic caſus tantùm unus, & quaſi pro nullo cenſeri poteſt. Quod ſi, ſervatâ quoad denſitatem eâdem proportione, radius A B paullò magis ad rectam E F inclinetur, ejus. Refractus ſupra ipſam E F aſſurget; punctum quippe D rectam E F nunquam pertinget; & punctum B decurſâ rarius intra medium peripheriâ B ϛ in denſum remeabit; in quo proinde rurſus, circulatione ſuâ dimiſſâ, per tangentes ϛ α, δ κ ferentur; adeò quidem ut radius ABCD jam reflecti videatur, quatenus medium denſius haud penetrat totus, vel egreditur.

Fig. 12.

Fig. 13.

VI. Nec ineptè quidem (etſi quodammodò, velutíque primariò, ſit refractio) reflectionis nomen adſciſcit hæc actio, quatenus & ipſa

 reflectionis

reflectionis leges examussim observat. Nam quoniam isoscelis trianguli Z B ς anguli Z B ς, Z ς B sunt æquales, etiam anguli (de rectis residui) A B E, $\alpha\,\varsigma$ F pares erunt; quod reflectioni proprium est. Itaque non abs recto pronunciant hoc Dioptrici; neque tamen causam, fortassis ab iis prætermissam, tacere volui, nonnihil ab immediatæ reflectionis causa diversam; nè quisquam hæsitet, aut hoc adsumenti gravetur concedere.

Kepl. prop. 14.

VII. Hæc autem doctrina cùm multis experimentis utcunque comprobari queat, unum saltem breviter attingam satìs illustre, neminísq; non examini patens. Esto triangulum A B C sectio prismatis triangularis æquilateri (nimirum vitrei, seu crystallini) basi parallela; in hujus autem base sumatur punctum quodpiam F, & sit angulus C F G circiter graduum 50. (unde juxta doctrinam hìc insinuatam, & posteà clariùs exprimendam, radius G F velut extremus erit eorum, qui rectæ B C è vitri partibus illabentes refractionem patientur; eo scilicet obliquior quilibet reflectetur.) Sit igitur (quoniam utramque quasi patitur inflectionem) ejus refractus F M, reflexus F E; item F G refringatur in G O, & F E in E R. Porrò jam in G O statuatur oculi centrum O; & ab eo prodeat radius O Q, qui refringatur in Q P; ipsorum O G, O Q refracti G F, Q P (uti secundum principia nostra posthac constabit) progredientes divergent; erítque propterea ang. Q P C ⊏ G F C; quare radius Q P medium B C penetrabit, ac refringetur, puta in P N; liquebit autem è dicendis refractos F M, P N à se divergere; Hinc jam radiis M F, N P interpositum objectum radiis O G, O Q interjectum apparebit, velut ad $\mu\,\nu$, situ neutiquam immutatum. Rursus autem ab oculi dicto centro prodeat alter radius O K, cujus refractus sit K I; hic itaque rursum à G F diverget, ac indè erit ang. K I F ⊐ ang. G F C; adeóque K I minimè penetrabit medium B C, at reflectetur, puta in I H; tum I H refringatur in H S. Ergò jam radiis E R, H S interjacens objectum puta R S radiis O G, O K interjectum cernetur, velut ad $\varrho\,\sigma$, situ partium everso. Consequuntur hæc doctrinam nostram, & experientiæ liquidò consentanea deprehendentur, quin & observatu dignum erit, è duplici refractione spectatum objectum M N Iridis coloribus tinctum adparere (rubro scilicet ad μ, cæruleo ad ν, croceo medium occupante) objecti verò R S è duplici refractione, sed reflectione tamen intercedente, apprehensi imaginem $\varrho\,\sigma$ colore nihil ab ipso objecto differre. Quod ex eo sanè videtur evenire, quoniam ang. F E B angulo F G C æquatur; adeóque radius K O non aliter è vitro exit, quam R E ingressus est; seu

Fig. 13.

ſeu quicquid retractio ad E effecit, id refractio ad K retexit, radium in ſtatum reſtituens, ei quem ab origine habuit non diſparem. Verùm hæc non eſt hujus loci penitiùs excutere, Saltem obſervari meretur hoc præcipuum, ut arbitror, in priſmate Phænomenon.

VIII. Hæc, inquam, cùm ab experientia confirmentur, neque tamen ei magis, quam ratiociniis noſtris conſentiant, cauſis tamen adſcribuntur (à quibuſdam) nedum diverſis, at prorſus adverſis. Quòd enim vitrum *e. g.* radios intra corpus ſuum receptos, ejúſque poſticæ ſuperficiei obliquius incidentes retrocedere cogat, hujuſmodi rationem exhibent: aiunt vitrum radios faciliùs admittere, vel tranſmittere quàm aërem; quin addunt aërem vi reflectendi prævalidâ pollere; quódque proinde qui poſt vitrum adventanti radio fit obvius aër cum reverberat. Quæ ratio mihi non adblanditur. Nam imprimis rei naturæ minùs conſentanea videtur. Quum enim aëris corpus ex æthere puro maximam partem, è corpuſculis terrenis, & ex halitibus aqueis conſtare totum videatur; ex his partibus æther, opinor, non minùs promptè quàm vitrum radios tranſmitti; aqua verò ſaltem (ex illorum, quibuſcum diſputamus, ſententiâ) tantillo difficiliùs; adeóque neutiquam harum alterutri dicta reflectio jure videtur attribuenda; terreſtres autem particulæ (quæ præ reliquis etiam pauciores videntur, & rariùs interſperſæ, præſertim in aëre ſudo ſummíſque montium excelſorum jugis) ſunt opacæ, nec lucem admittunt, aſt eam in omnicunque pariter incidentiâ rejiciunt; adeò ut nec ad has quam reſpicimus lucis inflectio propriè ſpectet; ergò nihil ſubeſſe videtur cauſæ, cur aër (præ vitro) ingruenti luci potentiùs obſiſtat. Addo; ſi talis aëri vis reflexiva competat, & vera ſit, quam hi Philoſophi memorato Phænomeno cauſam aſſignant, conſequi videtur, ut nulla prope Horizontem Stella conſpici poſſit (admiſſo ſaltem hoc, non inverecundo reor, ut pleriſque viſum erit, poſtulato; quòd purus Æther, naturale lucis vehiculum, aëreæ regioni ſuprajectus haud minùs facile quàm vitrum aut aqua radios intromittet.) Sit enim C terræ centrum, O oculus, S viſibile punctum longinquum, ceu ſtella, ſitum in Horizonte; per puncta verò C, O, S trajectum concipiatur planum faciens in terræ ſuperficie circulum OP; in atmoſphæræ, vel aëris circumfuſi, extima ſuperficie circumferentiam ZNM; itaque cum radius quilibet, ut SM, vel SN (Horizontalis puta, vel eò ſuperior) in ſuperficiem MZ cadens ei incidat perquam obliquè (niſi ſaltem atmoſphæræ Semidiameter CZ præ telluris Semidiametro CO dicatur enormiter, & incredibiliter magna) cùm & aër idcircò, juxta ſententiam quam ex- Fig. 14.

 pendimus,

pendimus, lucem admittere non debeat; omnino dicti radii S M, S N, & consimiles reflectentur, & extra atmosphæram procul abeuntes oculum non pertingent. Quinimò satis constare videtur exhinc, quòd radii quales S N ut visum afficere queant, aut accedere, versus perpendicularem N C refringi debent; id quod adversariæ Hypothesi pariter adversatur. Verùm hæc obiter, ac in trancursu dicta sunto.

IX. Porrò, subnotandum est, quoad binos casus suprâ tractatos, cùm duo media, diversimoda comparandò duæ se representent proportiones, altera, terminorum situm transponendo, alterius inversa, refractionum ideò mensuras (quoad hæc) iisdem terminis designabiles ordine permutari. Ut si in primo casu sinus rectus anguli incidentis se habeat ad sinum rectum anguli refracti, sicut A ad B, in secundo sinus incidentis ad sinum refracti se inversè habebit ut B ad A; nimirum in præcedentibus figuris, quanto Z D major est quàm Z B, in prima Hypothesi; tanto constat Z D minorem esse quàm Z B, in secunda; mediis scilicet iisdem permanentibus.

X. Denique, cùm medii cui radius impingit superficiem hactenus adsumpserimus planam, advertendum superest, quamvìs illa curva sit, eodem tamen absque sensibili discrimine sese modo rem habere, ac si plano curvam superficiem isthic, ubi radius occurrit, contingenti impingeret. Incidat nempe radius A B C D in curvam lineam Q B R, quam ad incidentiæ punctum B tangat recta E F. Prorsus eodem modo refringetur iste radius ad curvam Q B R, quo ad rectam E F, nisi quòd isthic arcus D δ in rariori medio decursus tangentem aliquousque prætergreditur. Id quod eximiam radii subtilitatem considerando, quámque perexiguo distet intervallo punctum δ à curvæ vertice B, nullam omnino sensibilem (imò nec imaginabilem) inducet differentiam. Quantillus enim iste circulus esse debet, in quo chorda B δ, radii latitudine paullo major, arcum subtendet aliqua cum ejus sensibili parte comparabilem? potest igitur angulus Z B δ æqualis supponi angulo Z B F; quo concesso reliqua fluent eodem tenore, quo præcedentia. Quin unà rationem exhibuimus suppositionis, quæ passim ab Opticis accipitur; ita tamen precario, non ut subinde nullum in audientibus scrupulum relinquat; nec ut semper adsensu firmo concedatur.

Fig. 15.

XI. Ità primarias istas circa radiorum inflectionem Hypotheses (vel Axiomata mavis, aut Theoremata) quibus omnis incumbit Optica

cujuscunque

cujuscunque generis scientia, qualitercunque declarare studuimus; & è principiis admodum affinibus elicere; modo, meâ sententiâ saltem, omnium qui legenti se vel cogitanti suggesserunt, simillimo veri, cúmque tam rationibus Mechanicis, quàm experimentis Physicis, & cùm ipsa rerum natura congruentissimo. Neque nulla mihi tunc oboriebatur voluptas, cùm postquam inter alios ista lucis symptomata explicandi modos hic ipse semet ingesserat, eum examini subjiciens, Geometriæ legibus (aliquanto sanè præter expectationem) adeò quadrantem comperissem. Meæ tamen eum tam fusè diducendi pepercissem operæ, si quæ doctissimus *Maignanus* hisce conformia, luculentius quidem opinor & accuratius, pertractavit, priusquam hæc aggrederer contigisset inspexisse; penes quem extare multa nil dubitem (nec enim eum adhuc curiosiùs evolvi) supplendis his, & confirmandis accommodata. Porrò fuit etiam animus, alias, quæ plurimæ traduntur, horum rationes percensere, ac perstringere (quarum mihi nonnullæ crassâ petitione laborare; multùm aliæ à re proposita abludere; quædam animum subtilitate potiùs confundere, quàm vi constringere videbantur) verùm etiam huic exponendæ nimisquam immoratus, hactenus insinuatis contentus, omnes transiliam; illius saltem eruditissimi viri nefas fuerit non astipulari penitus, & acquiescere decreto; "qui, Deum unicum & Optimum Naturæ Architectum, hanc (ait) legem radiis diversa media permeantibus præscripsisse; ut omnes omnino radii veri, & apparentes eandem semper inter se servent analogiam. His, inquam, dimissis, succedit ut è præstructis emanantia quædam Porismata subnectamus.

Lect. III.

I. HYpotheses Opticæ primarias, & fundamentales quasi leges expoſuimus hactenus, & excuſſimus quomodocunque: Sequitur jam ut ex iis emergentia quædam (ad apparentiarum cauſas tam verè quàm expeditè diſcernendas conducentia) ſubjungamus corollaria; de cæteris quæ faciliora videntur, aut uſum præ ſe ferunt potiſſimum ſeligentes. Radios autem jam conſideramus, ut unicâ dimenſione præditos (ſiquidem reliquæ, quibus Phyſicè gaudent, parùm faciunt ad computationes hìc inſtitutas) ut lineas, inquam ceu vulgò fit, rectas concipimus à lucido quolibet aut aſpectabili puncto dimanantes. Quin & cum, hoc admiſſo, ſinguli cujuſque radii inflectio in ſuperficie peragatur ad planum inflectens recta (uti conſtat è præmiſſis) cùm & nobis præſertim mox inſtitutum ſit ſingulorum punctorum radiationes conſequentia ſymptomata ſic expendere, ut locos ipſorum apparentes determinemus, oculi reſpectu centrum habentis in ejuſmodi plano uſpiam conſtitutum; pro planis ubique rectas lineas, pro Sphæricis ſuperficiebus peripherias circulares, pro reliquis lineas reſpectivè congruas, brevitati conſulentes & perſpicuitati, ſubſtituemus. Porrò cùm quo præciſè modo peragatur viſio, quibúſque prædita ſit affectionibus adhuc expoſitum non ſit; Et de illa tamen ſubìndè craſſius aliquid ac generalius dicendis intexere fortaſſis ex uſu fuerit, illa ſaltem pervulgata, poſt hac curioſiùs expendenda, jam προλεπτικῶς adſumemus; nempe: Viſibile punctum in illo radio ſitum apparere, qui procedens ab ipſo (directè vel inflexè) centrum oculi permeat; proindéq; ſitum objectorum è radiorum ità tranſeuntium poſitione judicari. Majora, minora, vel æqualia videri objecta, prout ipſorum extrema puncta radiis cernuntur angulos ad oculi centrum reſpectivè majores, minores, aut æquales conſtituentibus; diſtinctam unius cujuſque puncti viſionem radiis effici modo naturali, hoc eſt, divergentèr, oculo illabentibus; Et ſiqua ſunt his agnata pariter obvia, ſeu manifeſta. Quinetiam, verborum parci, vocabulis paſſim receptis & uſitatis definiendis aut explicandis abſtinentes, ipſorum ſupponimus intellectum.

ctum. His utcunque majoris evidentiæ causâ, prælibatis, ad corollaria quæ diximus expromenda nos conferemus è vestigio.

II. Imprimis autem (posthac quidem in decursu, quoad plures sibi parallelos, aut ab eodem puncto divergentes (vel in idem convergentes) & huic vel illi singulari, quæ tractanda veniet, superficiei incidentes (radios, singularia quotvis inflexos designandi compendia, radiationibus organicè examinandis profutura, tradituri) generales nunc aliquos incidenti cuivis proposito competentem inflexum assignandi modos proponemus; quorum adhiberi possit, qui rei natæ videbitur accommodatior. Pro reflectione. Incidat radius A B ad B; Et per B ducatur Q B reflectenti perpendicularis; & fiat ang. α B Q = ang. A B Q, vel per B ducta sit E F reflectentem tangens; & fiat ang. α B F = ang. A B E; liquetque factum esse, modo utrovis, quod requirebatur, Pro refractione vero; ducatur Q B refringenti perpendicularis, & super diametrum (in hac liberè sumptam) Q B describatur semicirculus, incidentem A B secans in R; tum adjunctâ Q R, factóque I. R :: Q R. T (terminis autem I, R hic & dehinc perpetuò proportio refractiones metiens indignitatur) circulo Q R B adaptetur Q S ipsam T exæquans; erit connexa S B protracta nempe) incidentis A B refracta. ¿ Vel: per incidentiæ punctum B ducatur E F refringentem contingens; & in hac utcunque sumpta B K sit circuli diameter, incidentem A B secantis ad R; & fiat I. R :: B R. T; & adaptetur B S = T; erit S B α ipsius A B refractus: Vel demum: In ipsa A B sumptâ utcunque diametro R B, super hac descriptus circulus secet perpendicularem Q B ad Q; vel tangentem E F in K; fiátque I. R :: B K. T. & adaptetur Q S = T; erit rursus S B α incidentis A B refractus. quorum ratio è positis inflectionum legibus admodum est manifesta. verba piget impendere. Fig. 16. Fig. 17, 18, 19.

III. Radii cujusvis incidentis inflexus inflexi vicissim incidens evadet.

Hoc plerique, diversè paullò prolatum, accipiunt, aut postulant. è præmissis autem facillimè colligitur. Idque potiùs methodi gratiâ (sicut & nonnulla quæ sequentur) quàm quia res meretur, ostendemus. Pro reflectione; Radius A B speculo E F impingens reflectatur in B α; dico radium B α permutatim in B A reflecti. Nam quoniam A B incidens reflectitur in B α, erit ang. α B F æqualis angulo ABE. Posito jam α B incidere, etiam angulus quem facit ejus reflexus cum B E æquabitur angulo α B F; proinde non alius erit ab ipso A B E. quare B A ipsius α B reflexus erit. *Albaz.* VII. 14. *Herig. Catop. Axiom.* 2 Fig. 1. 16.

Pro

Pro refractione vero: Incidat radius A B medio E F in B; & isthic refringatur in B α; dico permutatim radium α B regredientem in B A refringi. Nam per occursum B ducatur Q B P media dirimenti E F perpendicularis; & in hac utcunque sumpto puncto P ducatur P G ad A B protractam perpendicularis, ut & P H ad B α; & producatur α B S. Est ergo P G sinus rectus anguli incidentiæ A B Q ad radium B P; & P H sinus anguli refracti Q B S ad eundem radium B P. Cùm itaque ratio P G ad P H refractionem metiatur è superiori medio factam in inferius; etiam vicissim rectarum P H, P G proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in superius. Unde si radius α B jam ponatur incidens; cùm sint P H, P G recti sinus anguli incidentiæ P B H, & anguli P B G, liquidum est ipsam H B in B A refringi.

Fig. 20.

IV. Angulo incidentiæ majori major competit angulus inflexus. (Angulum inflexum vocito, qui à perpendiculari continetur & inflexo; is proinde respectivè dicitur angulus reflexus, vel refractus. Angulus autem inflectionis (hoc est reflectionis respectivè, vel refractionis) appellatur is, qui comprehenditur ab incidente & inflexo; incidentiæ verò, nè quis secùs accipiat, apud nos angulus est, quem continent incidens & perpendicularis.) Quod propositum spectat effatum, id è positis principiis manifestè consectatur. Etenim in reflectione ipsi anguli reflexi angulis incidentiæ proportionales sunt; in refractione saltem recti sinus angulorum refractorum sinubus angulorum incidentiæ proportionantur. Unde liquidò constat propositum: quorsum verba, quorsum Schemata multiplicem?

V. Cùm incidentes ad superficiem mediam sese decussant, iidem sese inflectionem passi decussabunt, eodem ordine servato, quem directè progedientes habuissent (utique sic ut perpendiculari post inflectionem propior incedat qui propior anteà fuit.)

Hæc propositio reverà non differt à præcedente; quò demirer eam à non nemine principia nostra usurpante aliunde comprobari.

Herig. Diop. 8.

VI. Angulo incidentiæ majori major convenit angulus inflectionis. Quoad reflectionem, res extra dubium evidens est; angulus enim reflectionis incidentiæ majori conveniens eum planè continet, qui minori incidentiæ respondet. Pro refractione vero: sit recta Q B P refringenti perpendicularis; incidant autem radii A B G, D B H (scilicet AB

obliquius

obliquiùs quàm D B.) Horum verò refracti sint B α, B δ; dico angulum ϵ B α majorem esse angulo H B δ. Nam ad B P in perpendiculari liberè sumptam diametrum constituatur semicirculus B G P; cui occurrant ipsæ A B, D B protractæ ad G, H; nec non ipsæ B α, B δ punctis α, δ. Fiat autem angulus G B K æqualis angulo H B δ, vel arcus G K arcui H δ; connectatur etiam recta δ G, secans ipsam P K in X, ducatnurque denuò subtensæ G δ, H δ. Jam ob angulos P G δ, P H δ pares (arcui quippe P δ insistentes ambos) & angulos G P K, H P δ ex constructione quoque pares, erunt triangula G P X, H P δ inter se similia. Quapropter erit P G . P X :: P H . P δ. est autem è lege refractionum P H . P δ :: P G . P α. quare P G . P X :: P G . P α: unde P X = P α. est autem P X minor quàm P K (quia tota subtensa G δ intra circulum jacet.) Quare P α minor est quàm P K; adeóque P K secabit angulum G P α. quamobrem arcus G α major erit arcu G K, hoc est arcu H δ. & idcircò major erit angulus G B α angulo H B δ: Q. E. D. Fig. 21. Fig. 22.

Procedit hæc demonstratio quoad casum, ubi I ⊏ R (vel cùm radius è medio rariori densius ingreditur) at exinde quoad alterum quoque casum facilè deducitur conclusio. Nam si vicissim α B, δ B concipiantur incidentes, erunt ipsæ B A, B D earum refractæ; ac etiamnum anguli α B G, δ B H erunt anguli refracti.

Hujusce Theorematis apud *Herigonium* habetur alia demonstratio. Confer sodes, & utramvis elige. Nos quam res obtulit posuimus. *Diopt. Prop. 4.*

VII. In isto refractionis casu, quum I minor est quàm R, si anguli incidentiæ, puta anguli D B Q, rectus sinus P H, ad sinum totum se habeat ut I ad R; nullus incidente D B obliquior radius medium E F refractus ingredietur, aut penetrabit. Fig. 23.

Nam penetret (si fieri potest) obliquioris alicujus A B G refractus B α. Erit ergo P G . P α :: (I . R ::) *P H . P B. est autem P G major quàm P H. ergo P α major erit quam P B. quod planè fieri nequit. Ergò A B non refringetur in medium ipsi E F subjectum. * *Hypoth.*

VIII. Angulus incidentiæ major ad angulum suum refractum majorem habet rationem, quam angulus incidentiæ minor ad refractum suum.

Erit scilicet (in figura numeri Sexti, cujus huc apparatus transferatur) ang. G B P . α B P. ⊏ ang. H B P . δ B P. Nam triangula Fig. 21, 22.

G P α,

GPα, HPδ ità disponantur, ut latera PG, PH sibi congruant (unde major angulus GPα minorem HPδ comprehendet) tum centro P per δ describatur circulus EδF ipsas PG, Pα secans punctis F, E; item connexâ EH, centro H per δ transeat circulus HMN ipsas HP, HE secans punctis N, M; denuò connexa Eδ cum PG conveniat in L. Estque jam ang. αPδ. ang. δPH :: sector EPδ. sector δPF $\sqsubset$ triang. EPδ. triang. δPL :: Eδ. δL :: triang. EHδ. δHL $\sqsubset$ sector MHδ. sector δHN :: ang. EHδ. ang. δHP. est igitur ang. αPδ. ang. δPH $\sqsubset$ ang. EHδ. ang. δHP. ergóque compositè ang. αPG. ang. δPH $\sqsubset$ ang. EHP. ang. δHP. permutandóque ang. αPG. ang. EHP $\sqsubset$ ang. δPH. ang. δHP. est autem HP. PE :: HP. Pδ :: I. R :: GP. Pα. adeóque EH ad αG parallela; vel ang. EHP = ang. αGP. ergò erit ang. αPG. ang. αGP $\sqsubset$ ang. δPH. ang. δHP. hoc est ang. αBG, αBP $\sqsubset$ ang. δBH. ang. δBP. vel componendo, ang. GBP. ang. αBP $\sqsubset$ ang HBP. ang. δBP. Quod erat demonstrandum.

Corol. 1. Ang. αBG. ang. αBP $\sqsubset$ ang. δBH. ang. δBP.
2. Ang. αBG. ang. PBG $\sqsubset$ ang. δBH. PBH.

Opportunum est hoc Theorema conciliandis cum experientia propositis refractionum legibus. Ut demirari subeat nuperrimum Opticæ scriptorem, virum alioqui diffusè doctum, hujusmodi ratiocinio leges istas impugnâsse: "In majoribus tamen angulis inclinationis (ipsissima sunt ejus verba) falsum esse constat (principium nempe nostrum;) in his enim angulus refractionis major est subtriplo anguli inclinationis; quod mihi aliisque ex luculentis experimentis compertum est. Hæc, inquam, ille ταυτοεπεὶ. Quasi verò dixisset; numeri 6 & 4 simul accepti non conficiunt 10, quia numerum efficiunt majorem quam 8. planè similis est discursus; non ovum ovo similius. Nam in refractionibus ex. gr. ad vitrum factis si ponatur ad quamvis inclinationem (puta graduum 15) quòd sit angulus refractionis subtriplus anguli inclinationis (quem ille vocat, incidentiæ nos angulum appellare solemus) necessariò, sicuti modò demonstratum est, è principio nostro consequetur, quòd ad aliam quamcunque majorem inclinationem refractionis angulus major erit subtriplo anguli inclinationis; nominatim acceptâ graduum 30 inclinatione juxta dictum principium institutus calculus angulum præbebit refractum 19. 24′; angulúmque proinde refractionis 10. 36′, qui 30 graduum trientem exuperat. Quare cùm Clarissimus vir Hypothesin hanc (à

Cartesio

Cartesio quidem primò repertam, ſed ab aliis pleriſque recentioribus opticis *Merſenno*, *Herigonio*, *Hobbio*, *Maignano*, quin & ipſo ejus conſodale doctiſſimo *Ricciolo* ſuſceptam & approbatam; quam & certè hujus Scientiæ non parùm intereſt veram deprehendi) labefactatum iret; eam potiùs imprudens experientiæ Suffragio communivit. Quinimò ſi quid inſit huic principio vitii, illud potiùs erit, quod in maximis inclinationibus refractionis angulos exhibet apparentibus aliquantillo majores; quæ tamen diſcrepantia num ipſius legis hujus, an experimentorum defectui, vel accidentariis quibuſdam intervenientibus cauſis adſcribi debeat, haud facilè pronunciaverim. Nec enim fortaſſis cognata reflectionis lex, à nemine non admiſſa, experimentis omnibus præciſè reſponderet. Nobis ſufficiet quòd in reliquis inclinationibus, mediis præſertim, dicta lex experientiæ, quam præferunt authores, perquam conſentanea reperitur; addo, quòd ab ea deductæ concluſiones cum experientia mirè conſpirant; nec ab ea quòd animadvertere potuerim, unquam diſcordant. Eam proinde (cùm alia probabilis haud ſuppetat, Geometricis, ratiociniis præſternenda) non verebimur ubivis ut ratam ſumere, ac adhibere; ſatis certi (apud nos ſaltem) in elicitis ab ea concluſionibus haud omnino quicquam notabilis erroris emerſurum.

IX. Obiter hîc & παρεκβατικῶς problemation quoddam interſeram (quia Schema num. 6. ſuperius ei gratis inſerviet, ejuſque conſtructio è ſuperiore conſtructione derivatur.) Per datum in refringente punctum (B) incidentem ducere; cui datus conveniat angulus refractionis. Ducatur B P refringenti perpendicularis (hanc autem duci poſſe ſupponimus, aut poſtulamus) & ad diametrum B P conſtruatur ſemicirculus; & ſit utcunque P G . P α : : I . R (pro P G verò præſtat ipſam diametrum P B accipere) ſumatúrque Arcus G K ſubtendens angulum parem dato. Fiat autem P X = P α. & per G, X ducta recta circulo occurrat in δ. demum accipiatur Arcus δ H = G K, erit ductæ B H refractus B δ (uti præcedentem diſcurſum invertendo non difficilè colligitur) adeóque liquet factum eſſe quod erat propoſitum. Hoc præter ordinem; ergo perfunctoriè. Fig. 21.

X. Cujuſcunque generis lineæ R B S incidat radius M N O ad N, ſitque dictæ lineæ perpendicularis recta N C; & in hac utcunque ſumpto puncto C, per hoc tranſeat incidenti parallela C B; quâcum conveniat ipſius M O inflexus G N K; erit in reflectione K N = K C; in refractione verò K N . K C : : I . R. (vel item, ſi in ipſo inflexo Fig. 24, 25.

 ſumatur

ſumatur utcunque punctum K; & ab eo ducta K L ad perpendicularem C N parallela cum incidente conveniet ad L, erit illic K N = N L; & hìc K N. N L :: I. R.)

Fig. 24, 25. Nam 1. in reflectione; quoniam ang. O N C = K N C (ex lege reflectionis.) Et ang. O N C = K C N (ex Hypotheſi quòd O N, C B parallelæ ſunt) erit ang. K C N = ang. K N C. adeóque K N = K C = N L: Q. E. D.

2 In refractione; ducantur C E ad N O, & C F ad N K perpendiculares (unde liquet puncta E, F exiſtere in circulo ſuper diametrum C N deſcripto) quare, connexâ E F; erunt anguli C E F = ang. F N C (eidem inſiſtentes peripheriæ F C) æquales. Item propterea eſt ang. E C F = ang. F N E = ang. N K C. quare triangula E C F, N K C ſunt æquiangula ſibi mutuò; quamobrem eſt C E. C F :: K N. K C. atqui (juxta legem refractionis) eſt C E. C F :: I. R. qua propter erit, K N.. K C :: I. R: vel K N. N L :: I. R: Q. E. D.

XI. Quod ſi per N ducatur tangens U T; erit (in reflectione) etiam K T = K N; & N T angulum M N K biſecabit. In refractione verò erit K T ad K N, ut co-ſinus anguli refracti, ad coſinum anguli incidentiæ. Quæ ſaltem ad noto, ceu Lemmatica.

XII. Ex his facilè deducantur Conicarum Sectionum circa radiorum inflectionem ſatis jam pervulgatæ proprietates; at quæ fortaſsè per nimias ambages.

1. Demonſtratæ proſtant. Ut in parabola (puta R B S, cujus axis B C) incidat M N O axi B C parallelus; ejuſque reflexus ſit N K; erit igitur (ex oſtenſis) K N = K C. at ſi punctum K ponatur umbilicus parabolæ; erit etiam indè (juxta notiſſimam hujuſce curvæ proprietatem) K N = K C. quare paralleli radii reflexus neceſſariò per umbilicum tranſibit; qui propterea non immeritò quoque *focus* appellatur.

Fig. 26. 2. Item *in ellipſe*, cujus axis B D, foci H, K, ſi ad quodvis curvæ punctum N à focis ducantur rectæ H N, K N; ſatis celebre eſt, quòd perpendicularis C N angulum H N K biſecabit. Unde N H. N K :: H C. C K. & componendo N H + N K. N K :: H K. C K. vel B D. N K :: H K. C K. vel permutando B D. H K :: N K. C K. quare ſi talis fuerit ellipſis, ut ſit B D. H K :: I. R. etiam erit N K. C K :: I. R verum ſi incidens M N ad B D parallelus refringatur in N K; erit (juxta mox oſtenſa) etiam N K. C K :: I. R. patet itaque quòd ipſius M N refractus per focum K tranſibit. Quid plura?

3 Non

fig: 13

fig: 14

fig: 15

fig: 16

fig: 17.

fig: 18

fig: 19

fig: 20

fig: 21

fig: 22

fig: 23

Opt pag 28

3. Non absimiliter in *Hyperbola*, (cujus itidem axis B D, foci H, K; reliquisque velut antea præparatis) ostendetur fore perpetuò N K . C K : : B D . H K . unde si fuerit (ex *Hyperbolæ* constructione) B D . H K : : I . R . erit etiam N K . C K : : I . R . quòd si radius M N ad C B parallelus refringatur in N K; hoc idem accidet, ut nempe sit N K . C K : : I. R. quare radii M N refractus per *Hyperbolæ* focum transibit. Fig. 27.

4. Quòd verò ab *Ellipsis* aut *Hyperbolæ* cujusvis focorum alterutro quilibet curvæ incidens radius in alterum reflectatur, admodum facilè dilucescit. Nam in ellipse, perpendicularis N C, in *Hyperbola*, tangens N T bisecat angulum H N K. unde patet propositum, Hæc extra nostras oleas posita cursim & levissimè perstringo; nec tamen ut eò multa putem desiderari.

Revertamur in orbitam; & quidem derelictis his generalissimis, ac abstractissimis, lemmatum vicem obituris, ad particularia descendamus. Ad planas verò superficies (vel earum loco propter insinuatam antehac causam subrogatas lineas rectas) inflexis obtingentia radiis primò contemplemur. Etiam quoad has Catoptricis primum, utpote facillimis, brevissimè defungemur.

XIII. 1. Parallelorum sibi radiorum (A B, M N) rectæ (E F) incidentium reflexi (B α, N μ) sunt etiam sibi paralleli. Fig. 28.

Nam quoniam A B, M N ex hypothesi sunt paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Ergò sunt anguli α B F, μ N F etiam pares. Quare rectæ α B, μ N sunt parallelæ.

XIV. 2. Sit recta A B Z rectæ reflectenti E F perpendicularis; cum hac verò promanantis ab A cujusvis radii A N reflexus α N conveniat in Z; dico forè B Z = A B. Nam ang. A N B = ang. α N F = Z N B. quare liquet triangula B N A. B N Z sibi mutuo æquilatera fore; & esse A B = B Z : Q. E. D.

XV. 3. Hinc, omnes ab uno puncto, divergentium tanquam ab altero quodam uno prodeuntes. Fig. 29.

Quoad punctum longè dissitum (suo parallelos ad sensum radios ejaculante) patet è penultima. Quòad punctum è sensibiliter finita distantia radians, ex ultima patet, quòd omnium ab A divergentium radiorum reflexi protracti concurrunt in Z; adeóque videbuntur ab eo promanare.

XVI.

XVI. Hinc punctum Z erit ipsius A (respectu oculi uspiam constituti) imago perfectissima. Siquidem imaginis vocabulo nil aliud intelligo, quàm locum à quo plures radii (quot scilicet afficiendo visui sufficiunt) similiter divergere, seu dimanare videntur, atque cùm à primariis objectis diffunduntur. Proinde cujusvis hoc modo radiantis objecti locus apparens, vel imago facilimè determinatur.

XVII. Exhinc etiam eâdem operâ, visûs imaginem adspectantis axis, seu reflexus principalis (iste nimirum qui per oculi centrum (puta O) transit,) & reflectionis (quod vocant) punctum determinantur. Connexa nempe recta O Z erit axis iste; nec non ejus cum E F intersectio N, punctum reflectionis.

XVIII. Quoad hoc reflectionis punctum unicam subjiciemus annotatiunculam. Radiante puncto A, & oculi centro O fixis manentibus recta Catoptrica E F ponatur rectæ cuidam O P parallela, sed alioquin situ indeterminata; erunt omnia reflectionis puncta in *Hyperbolæ*. Sit, inquam, A P ad O P perpendicularis, & bisecentur A P in X, at-
Fig. 30. que P O in Y; & per X ducatur X G ad P O parallela, item per Y ducatur Y H ad A P parallela; & X G, Y H concurrant in C; tum Asymptotis C G, C H per ipsum O descripta concipiatur *Hyperbole* R O S; hæc per omnia reflectionum dictarum puncta transibit. Nam utcunque ducta E F ad P O parallela *Hyperbolæ* R O S occurrat ad N; & ducantur rectæ A N, O N; dico angulnm A N E angulo O N F æquari. Secet enim A P ipsam E F in B; & ducatur O Q ad A B parallela. Et, ex *Hyperbolæ* natura, est C D. C Y :: Y O. D N. quare dividendo erit Y D. C Y :: Y O—D N. D N; hoc est O Q. C Y :: N Q. D N. & permutatim O Q. N Q :: C Y. D N. item rursus ob C D. C Y :: Y O. D N. erit componendo C D + C Y. C Y :: Y O + D N. D N. hoc est A B. C Y :: B N. D N. vel permutando A B. B N :: C Y. D N. quare est O Q. N Q :: A B. B N. ergò rectangula triangula, O Q N, A B N similia sunt; & patet angulum O N Q angulo A N B æquari: Q. E. D.

Mereri saltem vel *Hyperbolæ* gratiâ videbatur hæc ejusce proprietas adnotari; quin & Analogiæ causâ versus ea quæ sequentur. Neque de reflectionibus ad plana quicquam prætereà. Ad refractiones transeo,

Lect. IV.

I. AD ea jam accedimus quæ radiis obveniunt ad planam ſuperficiem, vel ad rectam lineam, refractis. Quod argumentum eo diligentius proſequemur, quia nondum pro merito ſuo videtur ſatis excultum; ut & quoniam in eo tractando methodum præſtituemus nobis, & quaſi normam in ſequentibus obſervandam. Ad rem.

II. Parallelorum rectæ lineæ (E F) incidentium radiorum (A B, M N) refracti (B α, N μ) ſunt etiam ſibi paralleli. Nam quoniam A B, M N ſunt, ex hypotheſi, paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Itaque refractos habent angulos pares; horúmque complementa (ſcilicet anguli α B F, μ N F) æquantur, quare liquet refractos B α, N μ ſibi parallelos eſſe. Fig. 31.

III. Hinc infinitè diſtantis, hoc eſt parallelos radios emittentis (infinitam ad ſenſum diſtantiam intelligo, qualis eſt quoad hoc ſtellæ cujuſpiam) puncti locus apparens, aut imago per hujuſmodi refractionem effecta infinitè quoque diſtat; quippe cùm hæc etiam per radios parallelos adſpectetur. Itaque ſitus ejus reſpectu viſûs ubivis poſiti facilè determinatur. Sit oculi puta centrum O; & A punctum radians immenſè diſſitum; connexáque A O refringentem E F ſecet in G; ſitque radii A G refractus G α; per O verò ducatur O B Z ad α G parallela; in hac ad infinitum protenſa (velut ad Z) apparebit punctum A. Cùm enim radii A G, A B ſint (ad ſenſum) paralleli, etiam ipſorum refracti erunt paralleli. Quare cùm G α ſit refractus ipſius A G, erit B O, ad G α parallela, etiam radii A B refractus. Ergò punctum A in recta O B protenſa apparebit. Quoad hujuſmodi radiationem nil ſuccurrit aliud; itaque de propinquo radiantis puncti ſymptomata contemplemur. Fig. 32.

IV. Sit recta A B rectæ refringenti E F perpendicularis; in qua ſit punctum radians A, ab E F haud ad ſenſum longè remotum; ab hoc Fig. 33.

autem

autem procedentis cujusvis radii (ceu A N) refractus N α cum ipsa A B
Lect. 3. num. 9. (protractus utique, vel retractus) conveniat in K; dico fore N K. N A :: I . R. (Neque non inversè, si fuerit N K . N A :: I . R; erit K N α ipsius N A refractus.)

Hoc è superiùs ostensis immediatè consectatur. Et hinc etiam satis apparet, quoniam (id quod bene notetur, ut passim in sequentibus assumendum) angulus N A B, æquatur angulo incidentiæ; (quippe cum is complementum sit anguli A N B;) & angulus N K B (complementum videlicet anguli K N B) æquatur angulo refracto. Cùm ita-
Fig. 34, 35. que sit hinc sinus anguli N A B (vel anguli deinceps N A K) ad sinum anguli N K A, ut I ad R; etiam in triangulo N A K latus N K ad latus N A sese habebit ut I ad R. Quod E. D. Quinetiam si latera N K, N A se habeant ut I ad R; etiam dictorum angulorum sinus ità se habebunt; unde constabit ipsam K N α ad A N pertinere.

V. Hinc particularis emergit expeditissimus modus hujusmodi quotcunque refractos designandi. Nempe per radians punctum A ducatur A B refringenti E F perpendicularis; & fiat A B . Z B :: R . I; tum per Z ducatur recta G H ad E F parallela. Proponatur jam quilibet incidens A N, cui conveniens designandus est refractus. Eum sic dedesignaveris. Protrahatur N A (si opus) ut cum G H conveniat in S; & centro N per S describatur circulus ipsam A B secans in K (secabit utique si refractus aliquis ad incidentem A N pertineat) erit connexa K N, protractáque radio A N debitus refractus. Etenim est K N . A N :: S N . A N :: Z B . A B :: I . R :: K N . A N. unde liquet (è præcedente) propositum.

VI. Exhinc etiam hujusmodi refractionis præcipua symptomata perfacili colliguntur Negotio; quæ seorsim acceptis, & quæ secum mutuò collatis accidunt refractis; hoc imprimis: In primo casu (quum nempe refractio fit è rariori in densius, seu quum I $\sqsubset$ R) concursus refractorum cum recta A B (quam subinde radiationis hujus axem appellare licebit) supra punctum Z existit. Nam connexâ N Z; quoniam ang. N Z S recto B Z S major est, erit N S (vel N K) $\sqsubset$ N Z; adeóque B K $\sqsubset$ B Z. Item, in secundo casu (quum media contrariè se habent) dictus concursus infra punctum Z existit. Etenim rursus connexâ N Z; est ang. N S Z recto A Z S (interno) major, adeóque N Z $\sqsubset$ N S, vel N K; & ideò B Z $\sqsubset$ B K.

VII. Hinc liquet punctum Z esse limitem ultra vel citra quem (re-
Fig. 35. spectivè) omnes refracti cum axe A B concurrunt. Quinimò quòd ipsius

ipsius perpendicularis AB (quasi) refractus in ipsum punctum Z terminatur. Porrò:

VIII. *Lemma*: sit AB ad EF normalis, & à duobus in AB sumptis utcunque punctis A, I (quorum A proprius ipsi B) ad duo puncta quævis M, N in ipsa EF acceptis (quorum verò M sit ipsi B vicinius) connectantur rectæ AM, AN; & IM, IN; dico fore AN . AM $\sqsubset$ IN . IM.

Nam centro N per A describatur circulus PAOR (rectas IM, IN intersecans punctis O, R) & per R ducatur RT ad EF parallela, secans IM in S. Et ob angulum NRT obtusum, patet rectam RT extra circulum totam excidere; unde SM $\sqsubset$ (OM $\sqsubset$) AM. adeóque AN . AM $\sqsubset$ AN : SM :: RN . SM :: IN . IM. liquet igitur esse AN . AM $\sqsubset$ IN . IM: Quod E. D. Hinc

Si duorum radiorum AM, AN (quorum hic obliquior) refracti Mα, Nα cum axe AB conveniant punctis I, K, erit in primo casu IB $\sqsupset$ KB; in secundo IB $\sqsubset$ KB. Etenim connexâ IN; est in primo casu, NK . MI :: NA . MA $\sqsubset$ NI . MI. adeóque NK $\sqsubset$ NI. unde BK $\sqsubset$ BI. ast in secundo, NK . MI :: NA . MA $\sqsupset$ NI . MI quare NK $\sqsupset$ NI; & indè BK $\sqsupset$ BI. Fig. 37.

IX. *Coroll.* Refractorum in primo casu concursus extra angulum ABN versantur; in secundo, intra eundem. Sed hæc eadem in decursu liquidius, ac multifariàm constabunt.

X. Porrò, bina quoad hos casus *Theoremata* subjiciemus, usus haud contemnendi.

1. Si fiat (in primo casu) YB . AB :: I . $\sqrt{Iq - Rq}$. sit autem cujusvis incidentis AN refractus KNα; & connectatur YN: erit KB . YN :: $\sqrt{Iq - Rq}$. R. Fig. 39.

Nam ob YBq . ABq :: (a) Iq . Iq — Rq. erit per conversionem rationis YBq . YBq — ABq :: Iq . Rq :: (b) KNq . ANq & permutando YBq . KNq :: YBq — ABq . ANq componendóque YBq + KNq . KNq :: YBq + BNq . ANq. (nempe YBq — ABq + ANq = YBq + BNq; quoniam ANq — ABq = BNq) Quarè rursus permutando est YBq + KNq . YBq + BNq :: KNq . ANq. dividendoque KNq — BNq . YBq + BNq :: KNq — ANq . ANq; hoc est KBq . YNq :: Iq — Rq . Rq: Q. E. D.

(a) *Hypoth.*
(b) 4 *hujus.*

F XI. *Corol.*

XI. *Corol.* 1. Hinc si duo refracti M α, N α cum Axe A B conveniant in I, K; & à puncto Y ad incidentias ducantur rectæ Y M, Y N; erit KB. IB :: YN.YM. Nam KBq. YNq :: Iq — Rq. Rq :: IBq.YMq. quare permutatim KBq. IBq :: YNq. YMq.

Fig. 40.

XII. 2. Hinc etiam si refracti M I, N K conveniant in X; & demittatur X P ad A B parallela; & huic protractæ M Y, N Y occurrant in R, S; erit N S = M R. Nam XP. SN :: KB. YN :: IB. YM :: XP. RM. cum itaque sit XP. SN :: XP. RM; erit S N = R M.

XIII. 2. In secundo casu; sit cujusvis incidentis A N refractus K N α; & fiat Y B q. K B q :: R q. R q — I q; & connectatur Y N; erit A B q. Y N q :: R q — I q. I q.

Nam quia K B q = K N q — B N q = K N q — Y N q + Y B q; erit (hypothesin persequendo) Y B q. K N q + Y B q — Y N q :: R q. Rq — Iq :: ANq. ANq — KNq. & per rationis conversionem Y Bq. YNq — KNq :: ANq. KNq. (est autem YBq = Y N q — B N q = Y N q — A N q + A B q) ergò Y N q — A N q + A B q. Y N q — K N q :: A N q. K N q (hoc est, antecedentes & consequentes adjungendo) :: Y N q + A B q. Y N q. quare dividendo A N q — K N q. K N q :: A B q. Y N q hoc est R q — I q. I q :: A B q. Y N q: Q. E. D.

Fig. 41.

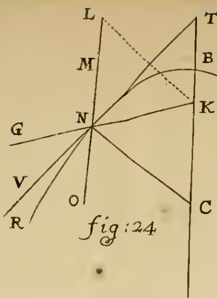
XIV. *Corol.* 1. Hinc rursus, si duo refracti Mα, Nα secent axem punctis I, K; ipsos autem se decussent puncto X; & fiat Y P. X P :: R. $\surd$ Rq — Iq. & per Y ducantur M Y R, N Y S; erit N S = M R.

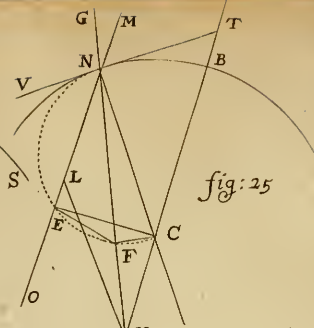
Nam S B. K B :: Y P. X P :: R. $\surd$ Rq — Iq. quare AB. SN :: $\surd$ Rq — Iq. I. item R B. I B :: Y P. X P :: R. $\surd$ Rq — Iq. quare A B. R M :: $\surd$ Rq — Iq. I. ergò A B. SN :: AB. R M. quare S N = R M.

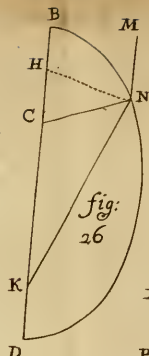
Fig. 42.

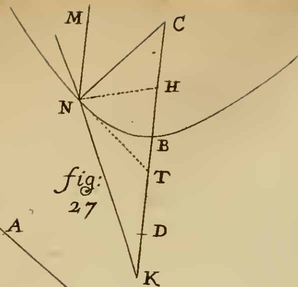
2. Hinc S B. R B :: K B. I B.

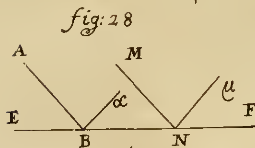
XV. Porrò, notandum est quò radii ab A manantes axi viciniores sunt eò refractos ipsorum spissiùs incedere; seu minora fore concursuum interstitia; ut nempe si in refringente E F sumantur æqualia intervalla M N, N O; & radiorum punctis M, N, O incidentium refracti M α, N α, O α cum axe concurrant punctis I, K, L; erit intervallum

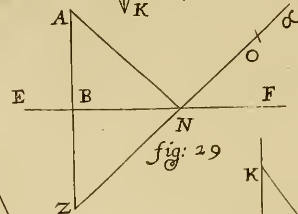

L
T
M
B
N
K
G
V
O
R
C
fig:24

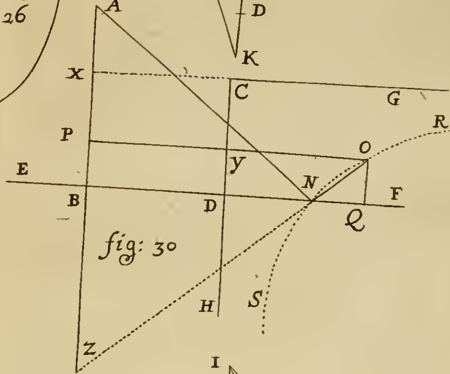

G
M
T
N
B
V
S
L
E
F
C
O
K
fig:25

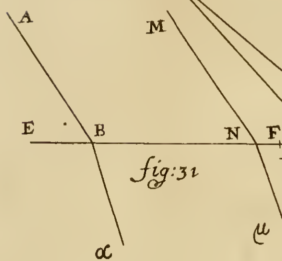

B
M
H
N
C
K
D
fig:26

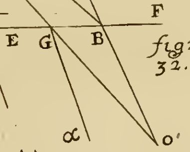

M
C
H
N
B
T
D
K
fig:27

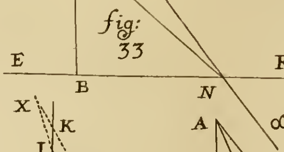

fig:28
A
M
E
F
B
N

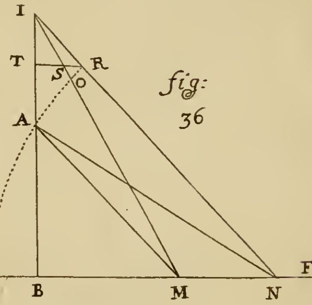

A
E
B
F
O
N
Z
fig:29

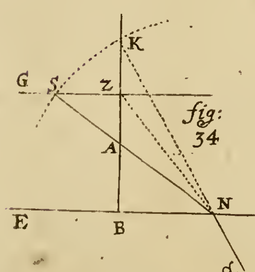

A
X
C
G
R
P
O
y
E
N
B
D
F
Q
fig:30
H
S
Z

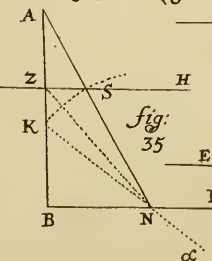

A
M
E
B
N
F
fig:31

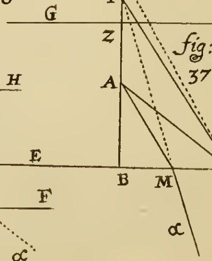

A
Z
F
E
G
B
fig:32.
O

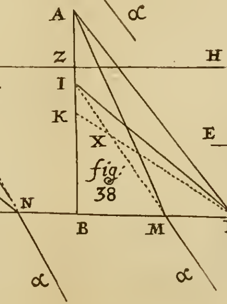

K
A
fig:33
E
F
B
N


I
T
S
O
R
fig:36
A
E
F
P
B
M
N


K
G
S
Z
fig:34
A
N
E
B


A
Z
S
H
K
fig:35
F
B
N


X
K
I
G
Z
fig:37
A
E
N
B
M


A
Z
H
I
K
X
fig:38
F
B
M
N

Opt pag 34

tervallum I K minus ipſo K L; ſeu generalius efferendo, libere ſumptis ipſis M N, N O; erit I K . K L ⊐ M N . N O. hoc verò non aliter, opinor, elegantius quam ex adjunctis uno, vel altero Theoremate conſtabit. Fig. 43.

XVI. In primo caſu; ſit (ut antehac) Z B . A B : : I . R; ſuperque diametro Z B conſtituatur ſemicirculus; cui à puncto B adaptetur B D = B A; & per puncta Z, D ducta recta refringenti occurrat in Y; tum ad ſemiaxes B Z, B Y (centro nempe B, vertice Z) deſcribatur Hyperbole H Z G; in hac autem ſumpto quolibet puncto S ducantur S N ad A B, & S K ad E F parallelæ. Denique ducantur A N, K N α; erit K M α incidentis A N refractus. Fig. 44.

Nam ex *Hyperbolæ* natura eſt K B q — Z B q . B N q : : B Z q . B Y q : : Z D q . B D q (hoc eſt) : : Z B q — A B q . A B q. quare componendo K B q — Z B q + B N q . B N q : : Z B q . A B q hoc eſt K N q — Z B q . B N q : : Z B q . A B q. permutandóque K N q — Z B q . Z B q : : B N q . A B q rurſuſque componendo K N q . Z B q : : A N q . A B q. denuóque permutando K N q . A N q : : Z B q . A B q : : I q . R q. quare K N . A N : : I . R. ergo K N ipſius A N refractus erit; Q. E. D.

XVII. Hinc refractorum cum axe concurſus (puta I, K, L) à ſe diſtant intervallis ordinatim applicatarum ad *Hyperbolam*, puta rectarum, B Z, M R, N S, O T; vel ipſarum O, Z I, Z K, Z L. Hæ verò (ceu paſſim notum, & à nobis aliquando generatim circa cunctas hujuſmodi curvas oſtenſum eſt) in majori ratione creſcunt, quam ipſæ B M, B N, B O; nempe Z L . Z K ⊏ L T . K S . & Z K . Z I ⊏ K S . I R. quare ſatis liquet propoſitum. Enimverò prope verticem Z ordinatarum differentiæ perquam exiguæ ſunt; ut bene multorum perpendiculari A B adjacentium radiorum refracti velut è puncto Z manare videantur; utcunque circa ipſum præcipuè conſtipantur.

XVIII. Haud abſimiliter, in ſecundo caſu, ſuper ipſa A B deſcribatur ſemicirculus; & huic accommodetur B D = B Z; & connexa protractáque A D refringenti occurrat ad Y; tum centro B ſemiaxibus B Z, B Y deſcribatur ellipſis H Z G; & in hac accepto quocunque puncto S ducantur S N ad Z B, & S K ad E F parallela; connectantur denique rectæ A N, K N; erit K N incidentis A N refractus. Fig. 45.
Etenim ex ellipſis natura eſt K S q . Z B q — S N q : : B Y q . B Z q : : B Y q . B D q : : B A q . A D q : : B A q . B A q — B Z q . & per con-

 verſam

versam rationem KSq . KSq — ZBq + SNq :: BAq . BZq . hoc est KSq . KNq — ZBq :: BAq . ZBq . quare permutando erit KSq . BAq :: KNq — ZBq . ZBq . & compositè KSq + BAq . BAq :: KNq ZBq . hoc est ANq . BAq :: KNq . ZBq . quare rursus permutando est ANq . KNq :: BAq . ZBq :: Rq . Jq . itaque AN . KN :: R . I . unde patet KN ipsius AN refractum fore : Q . E . D.

XIX. Exhinc, ut in priore casu, patet quòd distantiæ (ZI, IK, KL) concursuum æquantur differentiis ipsarum ZB, KM, SN, TO ordinatarum ad ellipsin. Et quod ZI, ZK ⊐ IR KS. &c differentiæ porrò dictæ circa verticem ellipsis Z admodum exiguæ sunt, adeóque propinquiorum axi radiorum refracti circa Z densè congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

XX. Ex his tandem universis colligitur quòd puncti radiantis A imago (respectu scilicet oculi centrum O habentis uspiam in axe AB constitutum) circà punctum Z consistet. Sit enim Dδ diameter pupillæ (illa nempe quæ in plano EAFO) & per hujus extrema transeant radiorum AM, Aμ refracti IMD, Iμδ ; sanè patet quòd nullius obliquioris (ceu ipsius AN, vel Aν) refractus oculum ingredi poterit ; quin universi tales aliorsum digredientur, adeóque nec illi quicquam advisum attinebunt ; eique nil omnino conferent efficiendo quaquam, nedum determinando. Quinimò cùm visus a solis afficiatur radiis intra spatium ZI axem intersecantibus, adeóque velut ab eo procedentibus, intra spatium ZI necessariò versabitur imago ; quia verò ex his qui circa Z concurrunt oculo rectiùs incidunt, ideóque præcipuâ vi pollent ; cùm & ii (uti mox ostendimus) spissiores sint, & præ cæteris confertim incedant (id quod etiam nonnihil illorum vim adauget) cùm etiam iidem faciliùs ab oculo rursus in idem punctum recolligantur (id quod posthac aliquatenus ostendemus ; & interim ex eo fit verisimile, quòd res per exiguum foramen spectatæ, radiis scilicet obliquioribus exclusis, longè distinctiùs, apprehenduntur) quoniam, inquam, hæc ita se habent, iis perpensis omninò rationi consentaneum est objectum videri ceu radios projiciens à puncto Z, hoc est ejus imaginem inibi consistere. Addo, quòd ob exilem pupillæ latitudinem, & propter aliquantam oculi distantiam à refringente ; totum spacium ZI perquam angustum erit, & instar puncti merebitur existimari : quæ cuncta propositum abunde videntur confirmare.

Fig. 46.

XXI. Accedit

XXI. Accedit tamen ei penitiùs astruendo etiam experientia: quâ nempe compertum habetur; quod objectum (velut A) in aquâ situm, oculo (O) perpendiculariter imminenti, ita distans videtur (puta ad Z) ut sit perpetuò A Z quadrans ipsius A B, id quod ratiociniis præcedentibus exquisitè congruit. Etenim cum experientia docuerit in refractionibus ex aqua factis in aërem, *Sinum anguli Incidentiæ ad Sinum anguli Refracti* se habere circiter, ut 3 ad 4; erit juxta constructionem præmissam ipsius Z B ad A B ratio subsesquitertia; seu hæc ad illam ut 3 ad 4. Quare nihil erat causæ cur hoc fretus experimento Præclarissimus vir receptam de refractione sententiam impugnaret, & exploderet; at potiùs ut ei promptiùs accederet, aut firmius adhæreret, expositi Phænomeni causam adeò perspicuam, adeò necessariam suggerenti. quinimo perpendicularem ipsam (quod adeò valde vult, acriterque contendit) è superiore doctrinâ quadantenus infringi, decurtarique (terminatione saltem refringi, tametsi non situ) patebit ad illam attendenti. *Is. Voss.*

XXII Habetur itaque definitus imaginis situs, ob oculum in axe collocatum. Succedit ut idem præstemus oculi gratiâ extra ipsum ubicunque siti. Sed priùs unum est quod opportunè moneamus, anteà prætermissum; eâdem scilicet operâ quoad radios convergentes simul ac divergentes confici negotium. Erunt enim ad punctum quodvis (ceu A) tendentium radiorum refracti prorsus iidem eum illis, qui divergentibus ab A convenient, modò cæteris manentibus invariatis (refringente scilicet & puncto A designatum situm retinentibus) media concipiantur transposita. Nimirum, exempli causâ, si N K sit refractus radii B N versus A tendentis è raro in densum; erit itidem N H ipsi K N in directum positus radii A N B, è raro in densum Fig. 47. (quæ nempe prioribus homogenea sint) procedentis refractus. Itaq; quæ de radiis divergentibus ostensa sunt, ea convergentibus, adhibito justo moderamine, pariter adaptari possunt; in horum locum divergentes respectivè congruos subrogando. Quare nedum in hoc casu, sed in omnibus qui sequentur, de radiis solummodò divergentibus instituemus sermonem; eò subintelligentes etiam convergentes ex hac regula determinabiles referri. Quæ sanè compendio deserviens observatio, generalibus istis supra delibatis meruit intertexi; nec enim ad hanc solam quæ præ manibus, ast ad omnes æquè, quaslibet ad superficies, radiorum inflectiones se extendit.

XXIII. Adsimilem & indè consequentem (cùm paralleli à puncto proveniant

provcniant infinitè diſſito) circa radios parallelos obſervatiunculam, compendio ſervientem, etiam hîc tempeſtivum fuerit adjungere; parallelorum nempe Convexis incidentium partibus radiorum inflexi, quoad poſitionis directionem, iidem erunt cum inflexis ipſorum concavis partibus incidentium; modò tranſpoſita concipiantur media. Quare parallelorum radiationes examinando nihil erit opus convexas partes à concavis diſtinguere; ſeu exinde caſus multiplicare. Res è poſthac dicendis clarior evadet. His admonitis, de tabula jam manum; & quam propoſuimus inſtituendam proximè diſquiſitionem ſequenti reſervamus.

LECT. V.

I. EO jam provecti ſumus, ut radiantis (à ſenſibiliter finita diſtantia) puncti locum apparentem inveſtigemus, illum nempe qui reſultat, è peracta ad planam ſuperficiem refractione; nec non reſpectu viſus extra radiationis axem conſtituti. Quorſum imprimis ſpectat, ut rectam determinemus lineam, in qua locus ille verſatur; tum ut ſingulare deſignemus in illa recta punctum, circa quod exquiſitè conſiſtit. Utriuſque quæſiti gratiâ conficiendum, (imò penitius excutiendum) venit hujuſmodi *Problema*:

II. *Dato puncto A, in poſitione datam rectam E F radiante, deſignandus eſt incidens, qui per alterum tranſeat datum punctum.*

Fig. 48, 49. III. Si datum punctum alterum (puta jam K) in recta A B exiſtat, ad refringentem E F perpendiculari Problema planum erit, ac ita facilè conficietur. In primo caſu (quando ſcilicet I $\sqsubset$ R) fiat A B . Y B :: $\sqrt{Iq - Rq}$. I. itemque fiat K B . T :: $\sqrt{Iq - Rq}$. R; tum centro Y intervallo T deſcriptus circulus ipſam E F ſecet in N; connectantunrque A N, K N; erit K N α ipſius A N refractus.

Itidem in ſecundo caſu (cùm I $\sqsupset$ R) fiat K B . Y B :: $\sqrt{Rq - Iq}$. R. A B . T :: $\sqrt{Rq - Iq}$. I. centroque Y intervallo T deſcribatur circulus ipſi E F occurrens in N; eritque rurſus K N α ipſius

A N

A N refractus. Hæc autem è supra positis Theorematis abunde constant. 10 & 13 Lect. 4.

IV. Verum extra casum hunc, & particulares alios nonnullos (quos hic certè nil attinet commemorare) generatim & illimitatè conceptum Problema solidum est, pluresque duabus solutiones admittit; id quod facilè perspicietur concipiendo punctum datum (puta X) in primo casu extra angulum A B F jacere (vel intra eundem, in secundo) quo posito liquet è præcedentibus obtingere posse nonnunquam, ut duorum ad partes B F incidentium refracti concurrant ad X; quin & alterius unius ad partes B E incidentis refractum etiam per idem X transire Fig. 50. quod cùm subinde, dico, contingere possit, indè certò consequetur *Problema* solidum esse.

V. Pro cujus solutione, primùm adnoto vix ullum *Problema* dari (præsertim è difficilioribus) quod non peculiarem lineam naturâ sibimet appropriatam habeat, cujus descriptione quàm expeditè construatur; & quidem ità, ut simul indolem suam prodat; possibilitatem, inquam, & impossibilitatem suam; determinationes, & limitationes necessarias; casuum & solutionum varietatem apertè monstret, & velut ob oculos representet. In cujus qualis qualis observationis specimen (alia quædam postmodùm exhibituri) imprimis lineam proponemus hujusce Problematis executioni peculiariter accommodatam, hoc modo promptè describendam.

VI. Per radians punctum A ducatur A R S refringenti parallela; Fig. 51. eidémque perpendicularis A B utrinque protendatur indefinitè. Item per datum alterum punctum X protendatur X R ad A B parallela: Quinetiam facto A S . A R :: I . R; per S extendatur S U ad A B parallela. Quibus stantibus per A quotcunque transeant rectæ secantes ipsam S U punctis H; & centro X, intervallis ipsas A H exæquantibus, describantur circuli secantes perpendicularem A B punctis K; demum per X, K ductæ lineæ cum ipsis H A conveniant in N. Per ejusmodi quæcunque puncta transibit proposito nostro deserviens linea (A N N) quam suscepimus describendam; cujusce nimirum cum refringente E F intersectiones ipsissima sunt incidentiæ puncta, quæ indagamus (hæ autem ad unas rectæ A B partes (veluti ad F) aliquando duæ erunt; subinde tantùm una, cùm E F sic effectam curvam tangit; quandoque nulla, cùm E F ultra tangentem dictam jacet; ad alteras saltem una erit; quæ satis attendenti manifesta futura subnoto tantùm

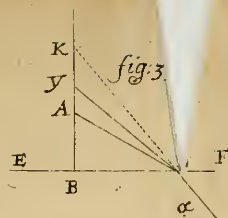
tùm & levi pede prætereo; quoniam aliunde mox apparitura) sit, inquam, ejusmodi quælibet intersectio N; dico fore XN, ipsius AN refractum. Etenim est I.R :: AH.AT. hoc est (quoniam AH, KX sunt ex constructione pares) I.R :: KX.AT :: NK.NA. unde manifestum, è præmonstratis, est propositum.

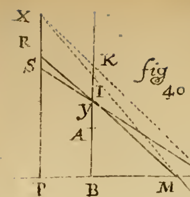
Fig. 51.

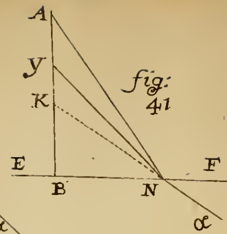
VII. Veruntamen hujusmodi constructiones *Geometrarum* usus aut non libenter admittit, aut alias saltem exigit per lineas vulgo notas, atque receptas; itaque consuetudini morem gerentes rem aliter conficiemus; huc utique faciens sequens *Problema Lemmaticum* præmittentes: Dato angulo recto XPF; punctóque quovis Y; per hoc rectam ducere dati anguli cruribus occurrentem, sic ut ab iis intercepta sit æqualis datæ rectæ T. || Expeditissimè quidem perficitur hoc ope *Conchoidis* alicujus polo Y descriptæ; sed enim quoniam & iste modus haud ità Geometricus censetur; adhuc iisdem Geometris obsequentes ità propositum exequemur. Ducatur YB ad PF perpendicularis; & *Asymptotis* PX, PB ducatur *Hyperbola* per Y transiens (si quidem punctum Y existat extra angulum datum, aut istius opposita (sc. punctum Y sit intra dictum angulum) tum centro Y intervallo datam T æquante descriptus circulus *Hyperbolam* inteersecet in K; & à K demittatur KL ad BP perpendicularis; accipiatur autem $BN = PL$; & per NY trajiciatur recta NG. dico factum; vel esse NG parem datæ T. || Nam (ductâ YH ad PB parallelâ) ex *Hyperbolæ* proprietate est $PL \times LK = PB \times BY$. adeóque cùm sit ex constructione $BN = PL$; erit $BN \times LK :: PB \times BY$. adeóque $BN.BY :: PB.LK$. est autem $BN.BY :: DY.DG$. ergo est $PB.LK :: DY.DG$. quare cum sit $PB = DY$. erit $LK = DG$. adeóque (pares LH, DP addendo, vel subtrahendo) est $KH = GP$. quinetiam est $YH = LB = PN$ (communem nempe PB, vel LN addendo) Ergò patet fore YK (vel T) æqualem ipsi GN: Q. E. F.

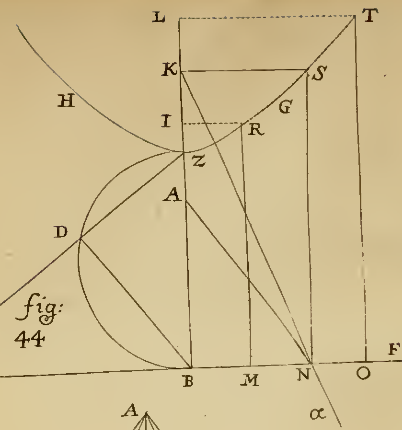
Fig. 52.

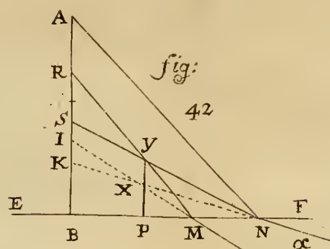
VIII. Notandum est autem in casu, quando punctum Y intra datum angulum XPF existit, quod circulus ille centro Y descriptus subinde designatam hyperbolem binis punctis secabit (quod enim pluribus haud quoquam secabit universim haud ità pridem circa tales ad eadem convexas curvas ostendimus) quo casu patet duas obvenire propositi solutiones, aliquando rursus ille dictus circulus *Hyperbolen* continget; & tum una tantùm per Y duci poterit recta, datam T adæquans; illa scilicet omnium quæ per Y dato angulo interseri possunt minima. Quod si circulus Hyperbolæ non occurrat, *Problema* prorsus ἀδύνατον erit.

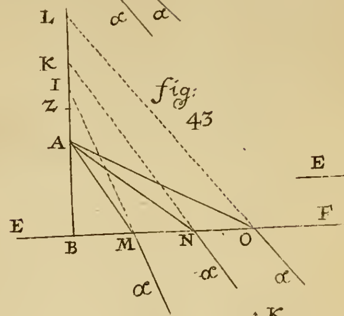

fig:3
K
y
A
E
F
B
α

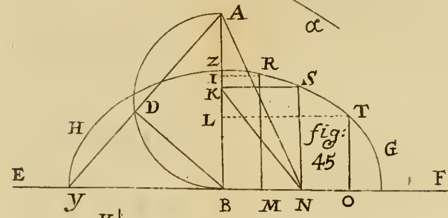

X
R
S
K
fig 40
I
y
A
N
P
B
M
α
α

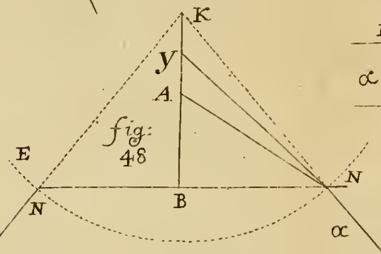

A
y
K
fig: 41
E
F
B
N
α

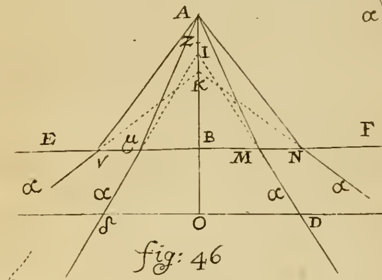

L
T
K
S
H
G
I
R
Z
A
D
fig: 44
E
y
B
M
N
O
F
α

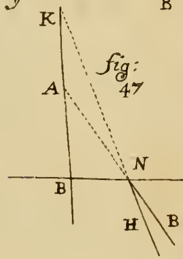

A
fig: 42
R
S
I
K
y
X
E
F
B
P
M
N
α
α

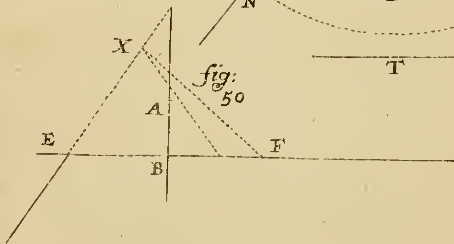

L
K
I
Z
fig: 43
A
E
F
B
M
N
O
α
α
α

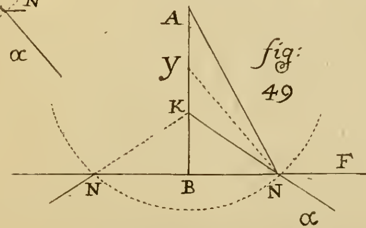

A
Z
R
I
S
K
D
L
T
H
fig: 45
G
E
F
y
B
M
N
O


K
y
A
fig: 48
E
N
B
N
α
T


A
Z
I
K
B
E
F
u
V
M
N
α
α
α
α
O
D
fig: 46


K
fig: 47
A
N
B
H
B


X
fig: 50
A
E
F
B


A
fig: 49
y
K
F
N
B
N
α

Opt pag 40

erit. || Sin punctum Y extra datum angulum exiſtat, evidens eſt tantùm uno modo problemati ſatisfactum iri; quódque per alteram interſectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. hæc, inquam, tantillùm attendenti manifeſtè conſtabunt; nihil ut ſit opus hic plura verba conſumere. verùm ut in horum caſuum primo conſtet (id quod pro ſequentibus ex uſu erit cognoſcere) quando dictus circulus *hyperbolem* contingit; ſeu quando tantùm una per Y recta quantitatis ejuſdem interſeri poſſit, hoc adnectemus *Theorema.*

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF exiſtente demittantur ad ejuſdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportione mediæ ſint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G tranſibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF ſubtendere poſſunt. Fig. 54.

Quòd NYG ſit una recta patet, quoniam eſt YB. BN :: GD. DY (ex conſtructione nimirum) porrò per Y tranſeat alia quæcunque recta LYM; & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuóque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR ſimilia fore; quódque propterea eſt MN. MR :: MNq. MHq :: DGq. YDq. item (ob BN, DG, YD ÷÷) eſt BN. YD :: DGq. YDq. hoc eſt YN. YG (vel MN. GS) :: DGq. YDq. ergò eſt MN. MR :: MN. GS. adeóque MR = GS. itaque major eſt GS ipsâ MT; abeóque rectæ GH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergò LM. GH :: LZ. GZ. verùm propter angulum LGH recto P majorem, eſt LZ $\sqsubset$ GZ. quare LM $\sqsubset$ GH. aſt ob angulum rectum GNH eſt GH $\sqsubset$ GN. quare magìs eſt LM $\sqsubset$ GN. eodémque modo quævis per Y ducta major oſtendetur ipsâ GN: Q.E.D.

X. Hinc etiam ſi GN ſit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam indè conſequetur fore YB, BN, GD, YD ÷÷. Etenim erit YNq. YBq :: GN. YN. & dividendo BNq. YBq :: GY. YN :: DY. BN. ac indè YBq × DY = BNcub; vel DY = $\frac{BN\,cub}{YBq}$. itáque DY eſt quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari poteſt autem, quòd minimæ GN propiores remo-

 tioribus

tioribus minores sunt. & quod cuivis eâ majori binæ pares interseri possunt, ad ejus utramque partem singula. nimirum hæc è superiori constructione luculentè patent; pauxillum expende Sodes; & perspicies; operámque meam non desiderabis.

XII. His præstratis ad *Principale construendum Problema* revertimur; & reliqua detexenda. scilicet imprimis à dato puncto A prodiens radius est designandus, cujus refractus per datum punctum X transibit. || hoc ità conficitur. per A, X ducantur refringenti perpendiculares A B, X P. tum in primo casu fiat A B. Y B :: $\sqrt{}$ I q — R q. I. neque non fiat X P. T :: $\sqrt{}$ I q — R q. R. & per punctum Y transadigatur recta N G subtendens angulum A P F, & ipsam T exæquans; & connectantur A N, X N. dico factum; seu rectam X V incidentis A N refractum esse. || Etenim est X P. K B :: N P. N B :: N G. N Y. permutandóque X P. N G :: K B. N Y. hoc est X P. N G (vel $\sqrt{}$ I q — R q. R) :: K B. Y N. itaque per theorema præmissum liquet K N ipsius A N refractum esse : Q. E F.

Fig. 55, 56.

Haud absimiliter in secundo casu; fiat X P. Y P :: $\sqrt{}$ R q — I q. R; itémque A B. T :: $\sqrt{}$ R q — I q. I; angulóque A B F per Y transiens, ipsámque T adæquans inseratur recta N G; connectantúrque A N, X N; factum erit. || Nam ipsam X P protractam secet A N in S. èstque S P. Y N :: A B. G N :: A B. T :: $\sqrt{}$ R q — I q. I. unde consequitur è præmonstratis fore X N ipsius S N refractum Q. E. F.

XIII. Exhinc, & præmissa respiciendo satìs dilucescit non ultra duos ad unas perpendicularis A B partes incidentium refractos in uno puncto convenire. nam (ut supra declaratum) per puntum Y (quod universis hujusmodi constructionibus commune, vel invariatum perpersistit; in primo casu quoad omnes ab A incidentes; in secundo quoad omnes per X transeuntes refractos) plures duabus sibi pares duabus sibi pares rectæ angulo recto X P F, vel A B F interseri nequeunt; adeóque nec plures refracti per ipsum X transibunt.

XIV. Porrò, cùm è dictis definita habeatur recta, in qua puncti A Imago versatur; iste nimirum refractus qui per oculi centrum transit, modo jam exposito ducendus; ipsum jam punctum determinandum venit, ad quod illa præcisè consistit; id quod etiam è præcedentibus haud difficulter eliciemus.

XV. Sumatur, in casu primo, punctum Y conditione præditum jam

jam aliquoties insinuatâ; scilicet ut sit $AB.YB :: \sqrt{Iq - Rq}.I$; & designetur quilibet refractus KN; tum continuetur ratio YB ad BN; ut sit ad has proportione quarta BP; & per punctum P ducatur recta PZ ad AB parallela; refracto KN occurrens in Z; dico nullum alium refractum per Z transire. Nam si fieri potest transeat alius ZR; & per Y traducantur rectæ NYG, RYS; è præmonstratis apparet quod sit RS * $= NG$. item è prædictis manifestum est quòd RS * $\sqsubset NG$. quæ repugnant. Fig. 57, 58.

* 12. Lect. 4.
* 9 hujus Lect.

XVI. Non dispari ratione, quoad casum secundum, designetur quilibet refractus KN; & fiat $KB.GB :: \sqrt{Rq - Iq}.R$; tum adnexâ GN, ad ipsas NG, GB sumatur tertia proportionalis V; & fiat $NG.V :: BN.NP$; & per punctum P ducatur PY ad BA parallela refractum NK decussans in Z; dico nullum alium refractum per ipsum Z meare. Nam, si neges, transeat alius ZR; & per Y trajiciatur RYS; & quoniam $ZP.YP :: KB.GB :: \sqrt{Rq - Iq}.R$. ex * antedictis apparet fore $RS = NG$. quinetiam ob $NGq.GBq :: NG.V :: BN.NP$. erit dividendo $NBq.GBq :: BP.NP$. hoc est $NPq.PYq :: BP.NP$; inde facile deducitur esse BP quartam proportionalem in ratione YP ad PN; consequenterque fore RS minimâ NG majorem. quod adversatur ostensis. itaque potiùs per Z nullus alius transit refractus: Q.E.D. * 14. Lect. 4.

XVI. Præterea, si refractum NKZ intersecet alius quilibet MI, ad rectiorem pertinens incidentem (hoc est ut incidentiæ punctum M inter B, & N jaceat) intersectio X solitario puncto Z citerior erit (seu perpendiculari KB propinquior). Nam ab X demittatur perpendicularis XQ; ipsam NG secans in γ; & (in primo casu) per M, Y traducatur recta MYH. ergò $MH = N\gamma$. quare minima earum quæ per Y angulo XQF interseri possunt inter puncta M, N cadet (utì nuper admonitum, & adstructum). puta ad φ. ergò quum sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad $B\varphi$, erit $PB \sqsubset QB$; adeóque recta XQ rectis ZP, KB interjacet: Q.E.D. Fig. 59, 60.

In secundo casu, per γ trajiciatur recta $M\gamma H$. ergò cùm sit $QX.Q\gamma :: PZ.PY :: \sqrt{Rq - Iq}.R$. erit $HM = GN$. ergò minima per γ ducibilium angulo ABF intercipienda punctis M, N intercidet; puta ad φ. quare QB quarta proportionalis erit in ratione γQ ad $Q\varphi$; & est $\gamma Q.Q\varphi \sqsubset (\gamma Q.QN.) :: YP.PN$. & sim-

ſimplicibus triplicatas ſubſtituendo rationes, eſt γQ. QB ⊏ YP. PB. & his æquales rationes adjungendo eſt QN. γQ + γQ. QB ⊏ PN. YP + YP. PB; hoc eſt QN. QB ⊏ PN. PB. componendóque BN. QB ⊏ BN. PB. ergo QB ⊐ PB. unde rurſus liquet rectam XQ ipſis AB; ZP interjacere: Q. E. D.

XVII. Conſimili prorſus argumentatione conſtabit obliquiorum incidentium refractos ultra punctum Z ipſam KN interſecare.

XVIII. Quinimò rurſus exertiùs apparet non niſi binos refractos in eodem puncto convenire.

XIX. Addo cum ipſo KN concurrentes refractos circa punctum Z conglomerari, præſertim illos, qui ad partes F (obliquiùs) incidentes pertinent.

Fig. 61. Nam accipiantur, exempli causâ, ſibi pares NS, ST; & ſit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad BS; & BR itidem quarta talis in ratione YB ad BT; & à punctis P, Q, R erectæ perpendiculares ipſam NKZ ſecent in Z, X, & V. patet (è mox oſtenſis) omnium ſpatio NS incidentium refractos cum NK concurrere intra ZX; nec non omnes ipſi ST incidentium refractos intra XV cum eodem convenire. porrò rectæ BP, BQ, BR ſe habent invicem ut *Cubi* rectarum BN, BS, BT, (vel ſunt in ipſarum BN, BS, BT *ratione triplicata*: nam BP. YB :: BN cub. BY cub. & YB. BQ :: YB cub. BS cub. adeóque ex æquo BP. BQ :: BN cub. BS cub. & conſimili ratione BP. BR :: BN cub. BT cub.) undè faciliè monſtrabitur eſſe PQ multo minorem quàm QR; vel ZX quàm XV (verbis parco multis in re ſatis manifeſta). quare dicti refracti circa punctum Z ſpiſſiùs ipſum NK decuſſabunt.

XX. Ex his demùm conficitur omnibus bene trutinatis, oculo (O) centrum habenti in refracto NK uſpiam conſtituto, puncti A imaginem ad ipſum conditione præditum toties inſinuatâ punctum Z conſiſtere. Sit enim CD pupillæ (in plano ABC jacens) *Diameter*; *axi Optico* KN perpendicularis; & per ejus extrema C, D tranſeant refracti IM LR ipſi KN occurrentes punctis X, V. ex oſtenſis patet omnium intra ſpatium MN incidentium radiorum refractos intra terminos ZX principalem refractum interſecare; neque non omnes ad ſpatium

ſpatium N R pertinentes intra Z V eidem occurrere; quinetiam nullius citra punctum M, vel ultra R incidentis refractum (ſeu nullum citra X, vel ultra V eum ipſo K N concurrentem) oculum ingredi poſſe. quare ſaltem imago conſiſtet intra terminos V X; ſiquidem aliunde qui videntur emanare *Radii* nihil quicquam ad viſionem conferent, aut ad eam ullatenus pertinebunt. cæterum quoniam ab V X procedentium (apparenter, inquam, procedentium) reciſſimi, vel axi propriores velut ab ipſo Z procedere videntur (ſeu à loco qui circa ipſum) ipsíque proinde validiùs afficiunt oculum, & ab eo faciliùs adunari, recolligíque poſſunt; cùm & ii præ cæteris confertim irruant (illi ſaltem qui ad partes N R,) quia denique propter anguſtiam pupillæ ſpatium V X haud ita magnum exiſtit; cùm, inguam, hæc ita ſe habeant, omnino rationi conſentaneum eſt, dictam imaginem circa punctum Z verſari; nec alias arbitror excogitari poſſe veriſimiles cauſas, quæ ſitum ejus determinent. *Alhazenus* quidem, & poſt eum pleraque cohors *Opticorum* ipſam ad punctum K, ubi principalis refractus perpendicularem A B decuſſat, conſtituit; verùm haud ullam rei natura cauſam ſuggerit, cur inibi ſtatuatur. unicus enim (niſi ſaltem pupilla perpendicularem ipſam A B comprehendat, oculuſque valdè ſit ei propinquus) per illud punctum means radius, afficiendo viſui minimè ſuffecturus, ingredietur oculum; eadémque punctorum intra K X ipſi K adjacentium eſt ratio; nullus ſiquidem ea permeans refractus oculum attingit; nil itaque ſubeſt cauſæ cur punctum A circa K appareat. quin adhuc à vero magis aberrat, *qui faciens N H æqualem ipſi N A puncto H affigit imaginem (huc, opinior, impulſus quia taliter in reflectione ſe rem habere perſpexit; cui ſimilis cauſa ni fallor *Euclidem*, *Alhazenum*, *Stevinum* (quanquam ipſos in diverſum euntes) horúmque ſequaces, in *Catoptricis*, in errorem egit; prout uſu non raro venit *analogias haud bene fundatas*, indiſtinctéque perceptas mortalibus imponere; ſed utcunque quod dixi magìs iſta ſententia abhorret à ratione.) nullus enim in primo caſu refractorum concurſus fit infra angulum A B F; nullus extra illum in ſecundo; proindèque fortiùs hanc quæ objecimus, quàm priorem *Alhazeni* percellunt ſententiam. addo quòd ſimul utraque, ſed præſertim hæc, multiplici refragatur experientiæ, multiplicíque ratiocinio; pariter enim ſe res habere debuit in *Catoptricis*, ut & in *Dioptricis circularibus*; id quòd manifeſtè, longéque ſecus tam ab experientiâ, quàm à ratione compertum eſt. quin hanc abunde ſubvertit ac peſſum dat quod ſupra propoſuimus experimentum, nemini non obvium; quòd nempe punctum A, oculo in ipſa perpendicu-

Fig. 62.

*D. Hobbius.

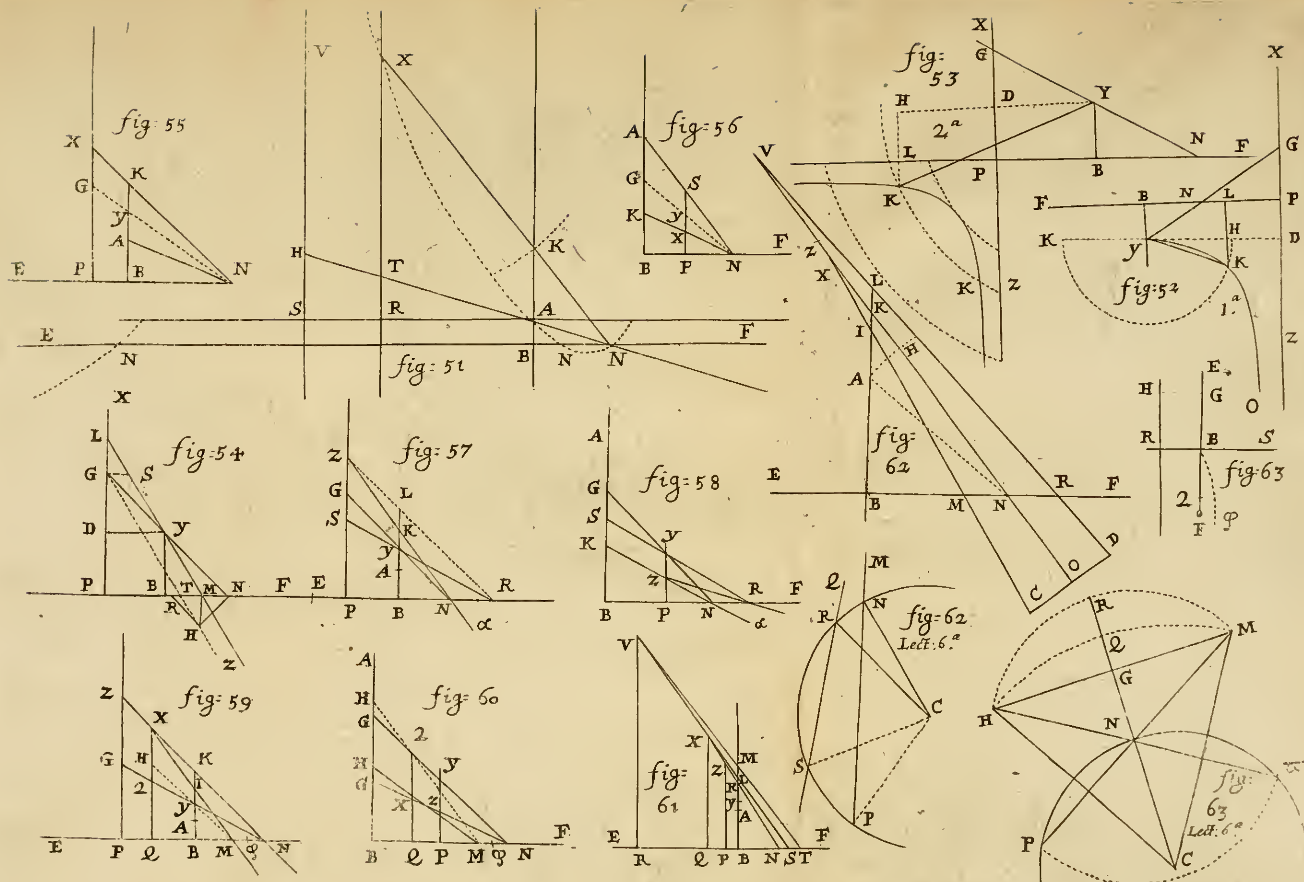
lari

lari A B constituto, non in suo loco (quod juxta dictam sententiam oportuit) ast pro mediorum diversitate, (perquam sensibili intervallo) citeriùs adspectatur, aut ulteriùs. Sed effatum hoc nostrum (eíque quoad reliquos in Catoptricis, Dioptricísque casus similes consona) tametsi novitium, & nullâ quod sciam hactenus auctoritate fultum, cùm forsan expositum dilucidiùs, tum penitissimè dabimus confirmatum, si quando nos de imaginum natura, locóque speciatim evenerit dissertare. Mihi saltem videtur hæc Scientiâ quoad hanc partem suam, certè palmariam (utì reperitur hactenus tractata) perquam mutila, nè dicam admodùm vitiosa; nec aliò ferè collimamus quàm ut aliquousque suppleamus eam, ac sanemus.

Fig. 63. XXI. Proximè dictis confirmandis idoneum haud illepidum experimentum interseremus. Aqueæ Superficiei R S (stagnanti, & immotæ desuper immineat objectum H G; ejus autem punctum G radat perpendiculum E F (filum puta candidum, aut stylus, cui plumbum F appenditur) videbitur itaque punctum G (oculo O) ex reflectione in ipsâ perpendiculari G B velut ad γ; at perpendiculi punctum F (admodum notabili distantiâ) citra lineam B γ aspicitur (velut ad φ) id quod ex sententia nostra factum oportuit; & *Alhazeni*, sequaciúmque doctrinam liquidò destruit.

XXII. Subjicio tandem ex his comparere modum genuinam refractariam quam vocant (per quam nempe recta linea repræsentatur in aquæ fundo conspicua) lineam designandi; cujus loco complures (utique non eandem omnes, ast aliam alii) Chimæram inani sunt operâ prosequuti; de quâ *Cartesius* ipse percontanti *Mersenno* sic respondit: "Non potest facilè determinari qualem figuram linea visa "in fundo aquæ sit habitura; neque enim certus est aliquis ima- "ginis locus in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgò per- "suaserunt Optici. Imò verò (tanti viri pace) cùm speciale quodvis objectum (per ejusdem generis & eodem modo terminatum medium aspectabile) similem constanter exhibeat speciem sui, simili situ dispositam, simili præditam figurâ; non video quin ex parte rei certum imago locum sortiatur; cujus certè (quoad illum qui præ manibus est casum) quotcunque puncta non difficilè poterunt è præcedentibus determinari. quinimò nullius non. ex hujusmodi planam ad superficiem refractione subnascentis phænomeni (quoad ejus intelligo figuram) causa verè, nì fallor, hinc & promptè possit assignari. verùm hæc circa planas superficies dicta sufficient; ad curvas nos proximè conferemus.||

Tom. II, Epist. 73.


fig: 51
fig: 52
1.a
fig: 53
2.a
fig: 54
fig: 55
fig: 56
fig: 57
fig: 58
fig: 59
fig: 60
fig: 61
fig: 62
fig: 62
Lect: 6.a
fig: 63
fig: 63
Lect: 6.a

Opt pag 46

LECT. VI.

I. ABsolutis iis, quæ radiis accidunt ad planam ſuperficiem inflexis (obſervatu quæ videbantur non indigna, cúmque principiis noſtris cohærentia; quæ denuò viam ſternebant, aut methodum aperiebant ſequentibus) ad curvas jam gradum promovemus; circa quas equidem cogitâram communia quædam delibare; verùm excuſſâ re, tam exilem illam & abſtractam deprehendo, ſatius ut exiſtimem actutùm ad particularia deſcendere. curvarum utique principem, & ad praxes Opticas longè paratiſſimam, Superficiem Sphæricam aggrediar è veſtigio. pro qua tamen, ob cauſas pridem aſſignatas, circulos ſubrogabo per oculi Sphæræque centra, pérque ſingula radiantia puncta trajectos. & quoad hos *Catoptrica* primò, *Dioptrica* poſtmodum exequemur. Ad illa.

II. Præſternemus autem λημμάτιον unum vel alterum; hoc imprimìs: Incidentium circulo radiorum obliquior eſt, qui magis à centro diſtat; vel qui minorem arcum (ſubſemicircularem) ſubtendit. ſcilicet obliquiùs incidit recta QRS, quàm recta MNP. Nam à centro C ducantur CN, CP; & CR; CS. & quoniam angulus RCS angulo NCP (hypotheſi nimirum inſiſtendo) minor eſt; patet reliquos CRS, CSR reliquos CN, P, CPN (cùm junctim, tum ſingulum ſingulo) majores eſſe. Cùm itaque Semidiametri CR, CN, circumferentiæ perpendiculares ſint; omninò liquet propoſitum. Fig. 62.

III. *Dato radio MN ad circulum incidenti congruum reflexum reſignare.* Fig. 63.

Variis modis huc facilè peragitur; quorum nunc unum adhibere, tunc alium ex uſu ſit. nos unum aut alterum ex expeditoribus attingemus. i. Incidens MN protrahatur ut circulum denuò ſecet in P.; & ſumatur arcus Nϖ = NP; erit connexa ϖNH ipſius MNP reflexus. nam à centro C connexâ CN, manifeſtum eſt angulum

CN ϖ,

CNϖ, angulo CNP æquari .22. Accepto quovis in NM puncto
Fig. 63. (puta M) centro C per M deſcribatur circulus MQH; item centro N per M deſcribatur circulus MRH, qui priorem MQH ſecet in H; erit HNϖ reflexus ipſius MNP. Etenim connexis CM, CH; & NM, NH, ex conſtructione liquet triangula CMN, CHN, invicem æquilatera fore; proindeque angulos CNM, CNH (& indè reliquos MNR, HNR) æquari 3. protenſâ CNR, a quovis in MN puncto, puta M ducatur MG ad CR perpendicularis, & in hac producta ſumatur GH = GM; erit conjuncta HNϖ iterum reflexus. Nam connexis NH, NM patet angulos GNM, GNH æquari. verum hi modi ſufficiunt huic conficiendo perfacili negotio.

IV. Nocetur ſi fuerit HNP reflexus ipſius MNP fore Nϖ = NP.

V. Diſpiciamus jam primò quid ex hujuſmodi reflectione contingat puncto ab infinitâ quoad ſenſum diſtantiâ radianti, ſeu parallelos projicienti radios. quorſum, per circuli reflectentis centrum C protendatur indefinitè recta ABC (hoc autem in ſequentibus evitandæ repetitioni perpetuò factum intelligatur; quin ejuſmodi recta nominetur axis; hîc *Speculi*, poſteà *Diaphani*) biſecetur autem Semidiameter CB in Z; & per Z tranſeat recta ZY ad CB perpendicularis, indefinitéque protenſa; tum quilibet incidat axi parallelus radius MNP ad N; (convexo circuli nil refert, an cavo; nam in utroque caſu reflexus quoad directionem idem erit; vel ejus qui in hoc, iſte qui in illo productus erit) connexáque CN ipſam ZY interſecet in V; fiátque CK = CV; ducatúrque NK; erit NK ipſius MN reflexus (vel reflexi productus.) Nam ducatur NQ ad CB perpendicularis, & connectatur CP. éſtque CZ.CK :: (CZ.CV ::) CQ.CN. quapropter antecedentes duplicando CN.CK :: PN.CN. item angulus KCN æquatur alterno CNP. ergò triangula CKN, NCP ſimilia ſunt; adeoque KN = KC. igitur è ſuprà generatim oſtenſis patet fore KN, ipſius MN reflexum.

VI. Hinc particularis emergit methodus hujuſmodi quotcunque reflexos quàm expeditiſſimè deſignandi; quin & ipſorum erga ſe rationes ac reſpectus; nec non pleraque primaria *Symptomata* facilè dilucеſcunt; corollariis nempe ſubjectis comprehenſa.

VII. 1. Patet punctum Z, Semidiametrum CB biſecans, eſſe metam

metam infra quam nullus reflexus axem secat (vel perpendicularis iqsius reflexum BZ ad Z terminari). quia semper $Cv \sqsubset CZ$; adeóque $CK \sqsubset CZ$.

VIII. 2. Patet esse $KN = KC$.
3. Patet fore PN ($2CQ$), CN, CK $\div\div$.

IX. 4. Ductâ tangente BT, productâque CNE, patet secantem CE distantiæ CK duplam esse; & $EN = 2KZ$.

X. 5. Manifestum est incidentis ad F (hoc est ad distantiam 60 graduum à vertice) reflexum per verticem B transire; proindéque reflexos omnium intra BF incidentium axem intra spacium BZ decussare; sed omnes *extra* BF reflexos ultra B cum eō convenire. Fig. 64.

XI. 6. Perspicuum est duorum hujusmodi quorumvis ad easdem axis partes incidentium (ut ipsorum MNP, QRS) reflexos (ut GNK, HRL,) productos se prius decussare, quàm axem. Nam, ductis CR, CN, est $C\rho \sqsubset Cv$, adeóque $CL \sqsubset CK$. unde necessariò rectæ NK, RL, se decussabunt, puta ad X. Fig. 65.

XII. Hinc ipsi convexis partibus incidentium reflexi, NG, RH, antrorsum procurrentes divergunt; adeóque nunquam uno plures idem oculi centrum permeant. unde speculum convexum unicam longinqui radiantis imaginem reddit.

XIII. 7. Notetur autem angulum GXR (vel KXL) à duobus reflexis comprehensum æquare duplum angulum NCR (hoc est duplum excessum angulorum incidentiæ). Nam ang. KXL = ang. ALR — ang. AKN = 2 ang. ACR — 2 ang. ACN = 2 ang. NCR.

XIV. Pro Sequentibus hujusmodi *Lemma* proponemus: In triangulo quopiam ABC recta AD bisecet angulum BAC; dico fore $AB + AC \sqsubset 2AD$. Fig. 66.

In *Isoscele* res clara est; in alio proinde sit $AC \sqsubset AB$; centróque A per B ducatur circulus BXY secans ipsam. AD in X, & AC in Y. Subtensa BX ducatur, ipsamque AC secet in V; fiátque VT ad AD parallela. denuò subtensa XY connectatur. Et quoniam ang. XVC major est angulo XYV, vel angulo BXD, vel ipso

BVT, patet rectam VT angulum XVC ſecare. item ob angulum XYV obtuſum, eſt $XV \sqsubset XY = BX$: ergo $BV \sqsubset 2BX$; & $VT \sqsubset 2XD$. Verùm ang. VTC (major ipſo TVB, vel ipſo DXB) eſt obtuſus; adeóque $VC \sqsubset VT$; itaque magìs $YC \sqsubset 2XD$. ergò $AB + AY + YC \sqsubset 2AX + 2XD$. hoc eſt $AB + AC \sqsubset 2AD$: Q. E. D.

XV. Quò paralleli radii rectiùs (vel axi propinquiùs) incidunt, eò reflexorum concurſus ad axem ſibi viciniores ſunt.

Fig. 67. Nempe ſumantur utcunque pares arcus NR, RX; & incidentium MN, QR, VX reflexi NK, RL, XM cum axe conveniant punctis K, L, M; erit $ML \sqsubset LK$. Nam connexæ CN, CR, CX rectæ ZY occurrant punctis ν, ϱ, ξ. Eſt itaque (juxta *Lemma* præcedens) $C\xi + C\nu \sqsubset 2C\varrho$; hoc eſt, $CM + CK \sqsubset 2CL$. quare $CM - CL \sqsubset CL - CK$; hoc eſt $ML \sqsubset LK$: Q. E. D.

XVI. Exhinc patet axi propinquam lucem ab hujuſmodi reflectione magìs magíſque conſtipari; maximè circa punctum Z, ubi perpendicularis ipſius quaſi reflexus terminatur. unde potiſſima conſtat ratio, quare concavis à ſpeculis ad ſolem expoſitis circa punctum Z *Ignis* accenditur; enimverò condenſatior, ínque ſpacium arctius quaſi compreſſa lux validiorem exerit vim, ac efficaciam.

XVII. Quinetiam ex his conſectatur, longinqui puncti imaginem oculo in axe conſtituta circa punctum Z conſiſtere. Sit, inquam,

Fig. 68. BCO axis Opticus; oculíque diameter $D\delta$ (in plana nempe circuli propoſiti ſita) hujus autem extrema permeent reflexi NKD, $VK\delta$ (ad incidentes MNP, $\mu\nu\varpi$ pertinentes). jam abunde manifeſtum eſt imaginem conſpicuam intra KZ ſpatium verſari. Nam alterius cujuſvis hinc, vel indè cadentis reflexus (ſeu ipſius RS, vel $\varrho\sigma$) oculum omnino transgredietur, adeóque nihil quicquam ad viſionem ipſam, vel ad ejus quemcunque modum determinandum conferet; id autem omne meritò tribuetur radiorum intra peripheriam NV incidentium reflexis; qui ſcilicet oculum ingredientes ſuo quiſque modo viſum aliquatenus afficiant. quoniam tamen ex his, qui propiores axi rectiùs incidunt oculo, magíſque pollent idcircò; nec non iidem propterea faciliùs ad unum in oculo punctum recolliguntur; præ cæteris etiam illi catervatim ingruunt; rationi conſonum eſt iſthic præſertim imaginem conſiſtere; ſiquidem velut ab eo plures, ac efficaciſſimi radii videbuntur emanare. Subjicio, propter admodum exiguam pupillæ

pillæ latitudinem, ipſum ſpatium K Z non ità magnum eſſe, quin inſtar *Puncti* poſſit cenſeri. Quibus expenſis luculentè conſtare videtur propoſitum.

XVIII. Subdo tantùm, ſi oculus uſquam intra ſpacium Z B ſtatuatur, viſionem indè confuſam, aut nullam evadere; quia nempe tunc reflexi præcipui (ſeu rectiſſimi) oculum convergentes appellent.

XIX. Ex his porrò facilè refelluntur, quæ de imaginis loco plenique tradunt omnes Optici; cum illis noviſſimus *Honor. Fabri*; juxta quorum doctrinam imago à puncto reflectionis tanto diſtat intervallo, quanto punctum radians ab eodem ſemovetur; ità quidem ut Sol ex hujuſmodi reflectione conſpicuus ad tantam, quantam directè ſpectatus, diſtantiam (eorum inſiſtendo ſententiæ) debeat apparere. quod immane quantum experientiæ refragatur. etenim ſi Soli exponatur *Speculum* R B ρ (concavum, aut convexum) ſic ut ei Sol quaſi perpendiculariter immineat, oculúſque prope axem B C conſtituatur uſpiam; ferè circa punctum Z, arbitrante ſenſu, luculenta Solis imago ſeſe præbebit oculo conſpiciendam; id quod juxta ratiocinium noſtrum neceſſariò debuit evenire. verùm hic error (in Opticâ capitalis, & quo non ablegato nulla phænomeni cujuſcunque ratio veriſimilis conſtabit) ubique ſe objiciet refutandum. hìc itaque pluribus parco; pergóque verſus oculum extra radiationis axem poſitum; poſtquam unicam hanc præcedentibus adnexam obnſervationem ſubjecero.

XX. Majoris Sphæræ portio vehementiùs urit; ut & Objectum viſibile clariùs atque diſtinctiùs repræſentat, quàm minoris æqualem obtinens latitudinem portio.

Super eandem nempe ſubtenſam N V inſiſtant imparium circulorum ſegmenta N B V, N b v; quorum axis A D; & in hoc circulorum centra C, c; conſtat ut minoris peripheriam N b v extra majoris N B V jacere; ità majoris centrum C infra minoris centrum c exiſtere. biſecentur jam Semidiametri C B, c b in Z, z; ducantúrque tangentes B T, b t; híſque ductæ C N, c N occurrant punctis E, e; denuò radii P N axi paralleli ſit ad peripheriam N B V reflexus N K; ad ipſam verò N b v ſit ejuſdem reflexus N k; liquidiſſimè jam patet quòd ſit N e ⊏ N E; hoc eſt quòd dupla z k major ſit duplâ Z K; adeóque ſimpla z k major ſimplâ Z K. majoris itaque Sphæræ portio ſtrictiores intra terminos illabentem lucem cogit; adeóque potentiùs operatur; eâdemque de cauſa rem objectam illuſtriùs atque Fig. 69.

 diſtinctius

diſtinctius exhibet obtuenti. quod erat propoſitum oſtendere. Et hæc quidem ad locum imaginis determinandum attinentia pleraque propter oculum in axe ſitum ſuffecerit attigiſſe. Supereſt ut idem oculi gratiâ ſecùs conſtituti pertentemus. id operis ſequenti deputamus.

LECT. VII.

I. ID nunc agimus, ut ab infinito quoad ſenſum intervallo radiantis puncti, è reflectione circularem ad peripheriam peracta oriundæ imaginis, oculi reſpectu præter axem ſiti, locum exquiramus. quocirca primùm ipſa recta linea determinanda venit, in qua locus iſte verſatur; tum ipſiſſimum præciſè punctum eſt deſignandum. In primi verò propoſiti gratiam hoc *Problema* confici debet.

II. Dato circulo reflectente BNP (cujus centrum C) rectâque CB poſitione data; deſignandus eſt huic parallelus radius, cujus reflexus per datum tranſeat punctum.

Fig. 70. III. Si datum punctum (puta K) in ipſa CB exiſtat, facilimè peragitur negotium. nam ſi centro K, intervallo KC deſcribatur circulus, ipſi reflectenti occurrens in N; erit KN reflexus ducti ad CB paralleli; prout ex antedictis abunde perſpicuum eſt.

IV. Si datum punctum (puta jam X) in ipſa reflectentis circumferentia verſetur; arcûs triſectione ſtatim exhauritur *Problema*. Nam ducatur XH ad BC parallela (quæ quidem ipſa uno modo proble-
Fig. 71. mati ſatisfacit) & interceptus arcus XH ſecetur punctis N, P, ut ſint arcus XN, NP, PH æquales inter ſe; connectantúrque rectæ XN, NP. dico factum. etenim ducantur CN, XP; & patet angulum CNX ipſi CNP æquari; adeóque fore XN reflexum ipſius PN; quinetiam ang. NPX æquatur angulo HXP; proindéque NP ipſi XH, hoc eſt ipſi BC, parallela eſt. itaque factum.

V. Verùm

V. Verùm extra casus hos, & particulares alios (mihi non incognitos, at nunc ἀπερισκέπτους) *Problema* magìs solidum est; in summo quippe gradu tale; quatuórque subinde Solutiones admittens; perque lineam evolvi potest (ut alia pleraque, sicutì pridem admonitum nobis) sibi peculiarem; illam hoc modo quàm expeditissimè per puncta describendam: Per datum punctum X protendatur indefinitè recta GF. ad datam CB parallela; connectatúrque recta XC; & super hanc ceu diametrum describatur circulus XICI. tum è puncto C prodeant quotcunque rectæ circulum XIC secantes punctis I, rectámque GF punctis H; & adsumantur in rectis CHI rectæ IN æquales interceptis IH (ità scilicet ut puncta I rectas NH perpetuò bisecent) perque puncta quotvis ejusmodi N traducta concipiatur linea; nimirum hæc (quà certè nulla Sectio conica faciliùs delineatur) problematis nostri constructioni deservit, ejúsque liquidò naturam patefacit; siquidem ejusce cum dati circuli intersectiones N (illæ verò subinde quatuor erunt, interdum tres (contactum enim intersectionibus adnumero) nonnunquam Solummodò duæ; prout datus circulus magnitudine præditus est aliâ ac aliâ; quæ strictim adnoto tantùm, animum advertenti manifestè constitura) possibiles quasque Solutiones exhibebunt. ducatur enim ab ipso X ad ejusmodi quamvis intersectionem N recta XN; & per N transeat MP ad BC parallela (vel ad GX) connexáque CN circulum XIC secet in I, rectámque GX in H; item jungatur XI. & quoniam è descriptæ lineæ naturâ seu constructione est IH = IN; angulúsque CIX, in Semicirculo, rectus est; erit XN = XH; vel ang. XNI = ang. XHI. atqui ang. XHI alterno HNP par est. quapropter anguli XNI, HNP pares sunt. adeóque recta NX ipsius NP reflexus erit. quod oportebat fieri. sic, inquam, enodari poterat id Problematis. at quoniam (ut innuebam suprà) *Geometrarum palato minùs sapiunt hujusmodi Problematum inusitatæ solutiones*; aliter id (satis breviter atque perspicuè) dabimus effectum hoc saltem eò faciens Lemmaticum Problema præmittentes. Fig. 72.

VI. Dato circulo (cujus positione data diameter GF) & puncto C in ejusce circumferentia quoque dato; per hoc recta ducatur, cujus pars diametro circumferentiæque interjecta æquetur datæ rectæ Z.

Id sic exequimur. Connectatur recta CF; & huic perpendicularis ducatur recta FV; & accipiatur ad ipsas Z, GF tertia proportionalis P; & per G angulo CFV inseratur recta RS par ipsi P (id autem quomodò præstandum, edocuimus suprà) tum per C ducatur

ducatur CHL ad RS parallela; erit intercepta HL (quod requiritur) æqualis ipsi Z. Nam connectatur CG; & huic perpendicularis ducatur GT; ad CF proinde parallela. quia jam ang. GCT = CGR = FSR, liquet rectangula trigona CGT, RFS assimilari. adeóque fore CT. CG::SR.SF. item (ob similitudinem triangulorum CGH, SFG) est CG.GH::SF.FG. erit igitur ex æquo CT.GH::SR.FG. (hoc est) ::FG.Z. verùm est CT.FG::CH.FH::HG.HL. permutandóque CT.HG ::FG.HL. quare FG.Z::FG.HL. liquet igitur HL ipsi Z datæ æquari: Q.E.F.

Plures esse casus possunt; ut nempe punctum L sit intra Semicirculum GCF (ídque positum inter puncta C, G, vel inter ipsa C, F) vel Fig. 73, 74. in altero Semicirculo GEF, ultra GF sito respectu puncti C; sed hæc una constructio simul ac demonstratio pariter omnibus convenit; ut pluribus huc non sit opus.

VII. Adnotetur saltem quoad istos casus, quòd sicuti per punctum G (ut antea commostratum) aliquando quatuor rectæ duci possunt datam adæquantes, rectísque FC, FV terminatæ; binæ scilicet inter angulum quò punctum G continetur, alteræque totidem extra ipsum; nonnunquam verò tres solæ; quum data recta minima continget esse cunctarum, quæ dicto punctum G continenti angulo possunt interseri; subinde tantùm duæ, quando data tali minimæ cedit; ità respectivè Problema jam expositum plures totidem solutiones accipit. Sanè quò major est hîc data Z, eò minor evadet intercepta RS; & vicissim quò minor RS, eò major ipsa IZ; unde si fuerit RS omnium minima, quæ angulo CFV punctum G capienti inseri possunt, etiam HL maxima erit è C prodeuntium rectarum, quæ inter diametrum GF, &Semicirculum GEF comprehendi possunt.unde *Porismatis* loco patet, è supradictis, quo pacto talis maxima duci possit; & hoc ipsum Problema penitus determinari. quod attendenti non obscurum innuisse satìs videtur. jam ad principalis quæsiti resolutionem accedimus; ità jam brevitur propositi.

Fig. 73, 74. VIII. Per datum punctum X rectam ducere, cujus reflexus datæ positione rectæ BC sit parallelus.

Id sic efficitur. Centro X per C describatur circulus GLFC; item per X ducatur GF ad BC parallela; tum ex C prjoiciatur recta, cujus secundum Lemma mox præcedens, intercepta pars HL æquetur Semidiametro reflectentis circuli; quæ & illum secet in N;

ductæ

ductæ XN reflexus (puta NP) ipsi BC parallelus erit. Nam connexis XC, XL; quoniam CN = HL; & CX = LX; & anguli XCL, XLC pares sunt; erit XH = XN. quapropter erit NP ad XH, vel BC parallelus: Q. E. F.

IX. Ex hac constructione, cum præmissi lemmatis solutione collatâ dilucescet hujusmodi non ultra quatuor reflexos per idem quodcunque punctum, ceu X, transire; quorum duo ad unas axis partes incidentibus, reliqui ad alteras conveniunt. adparebit etiam si CN major sit, quam ut ei par HL rectâ GF, Semicirculóque GEF intercipi possit; quod ad axis partes, ad quas ipsum X ponitur, omnino nullus per hoc punctum reflexus meabit; quinetiam si CN Fig. 75. tanta sit, ut ei par una tantùm ejusmodi recta possit intercipi, quòd unicus per ipsum X reflexus iter suscipiet. tales, inquam, expositi problematis determinationes hanc constructionem haud obscurè sequuntur; quas certè tu meliùs uno mentis (haud dormitantis) ictu perspexeris, quàm ego pluribus verbis explicâro.

X. Exhinc itaque denuò rectam (seu rectas) satìs definivimus, in qua (vel in quibus) puncti radiantis Imago, respectu visûs utcunque positione datum centrum habentis, consistit. ad ejus jam præcisiorem locum investigandum accingemur; in istarum rectâ quâpiam existentem.

XI. Huc adnotetur imprimìs, quòd si duorum ad easdem axis partes incidentium parallelorum (NP, RS) reflexi sint Nϖ, Rσ; erit arcus NR, vel PS arcûs $\varpi\sigma$ subtriplus. Concurrant enim dicti reflexi in X; & Connectatur recta Rϖ. & quoniam, è præmonitis, Fig. 76. angulus NXR duplus est anguli arcui NR ad centrum insistentis; erit idem angulus NXR anguli NϖR quadruplus. quapropter erit ang. NXR — ang. NϖR triplus anguli NϖR, hoc est angulus XRϖ anguli NϖR triplus. unde quoque triplus erit arcus $\varpi\sigma$ ipsius NR: Q. E. D.

XII. Iisdem stantibus dico fore RX (obliquioris reflexi partem incidentiæ concursûsque punctis interceptam) majorem quadrante totius reflexi Rσ. Nam, ductis subtensis NR, $\varpi\sigma$; erit 1 . 3 :: arc. NR . $\varpi\sigma$. $\sqsupset$ recta NR . $\varpi\sigma$ :: RX . Xϖ $\sqsupset$ RX . Xσ (quia scilicet est Xϖ $\sqsubset$ Xσ). igitur est Xσ minor triplâ RX; componendóque minor erit Rσ quadruplâ RX: Q. E. D.

XIII. Item

XIII. Item, dico fore NX (rectioris itidem reflexi concursûs incidentiæque punctis interjectam partem) minorem quartâ parte totius $N\varpi$. Etenim fiat ang. $HR\varpi =$ ang. $N\varpi R$; quapropter erit $HR = H\varpi$; adeóque $2 H\varpi = HR + H\varpi \sqsubset R\varpi \sqsubset N\varpi$. item quoniam ang. $RHN = 2$ ang. $HR\varpi =$ ang. XRH; est $XH = XR \sqsubset XN$. quum itaque sit $H\varpi$ major semisse totius $N\varpi$; & XH major semisse residui NH; liquet totam $X\varpi$ majorem esse triplâ XN; seu totam $N\varpi$ majorem esse quadruplâ NX: Q. E. D.

XIV. Hinc perspicuum est, si fuerit NZ reflexi $N\varpi$ quadrans, quòd nullus alter hujusmodi reflexus punctum Z permeabit. Etenim alterius cujusvis reflexus permeare dicatur; erit igitur, si obliquior is fuerit, $NZ \sqsupset \frac{1}{4} N\varpi$; sin rectior fuerit, erit $NZ \sqsubset \frac{1}{4} N\varpi$ (nimirum è proximè demonstratis hæc consequuntur) quæ repugnant hypothesi.

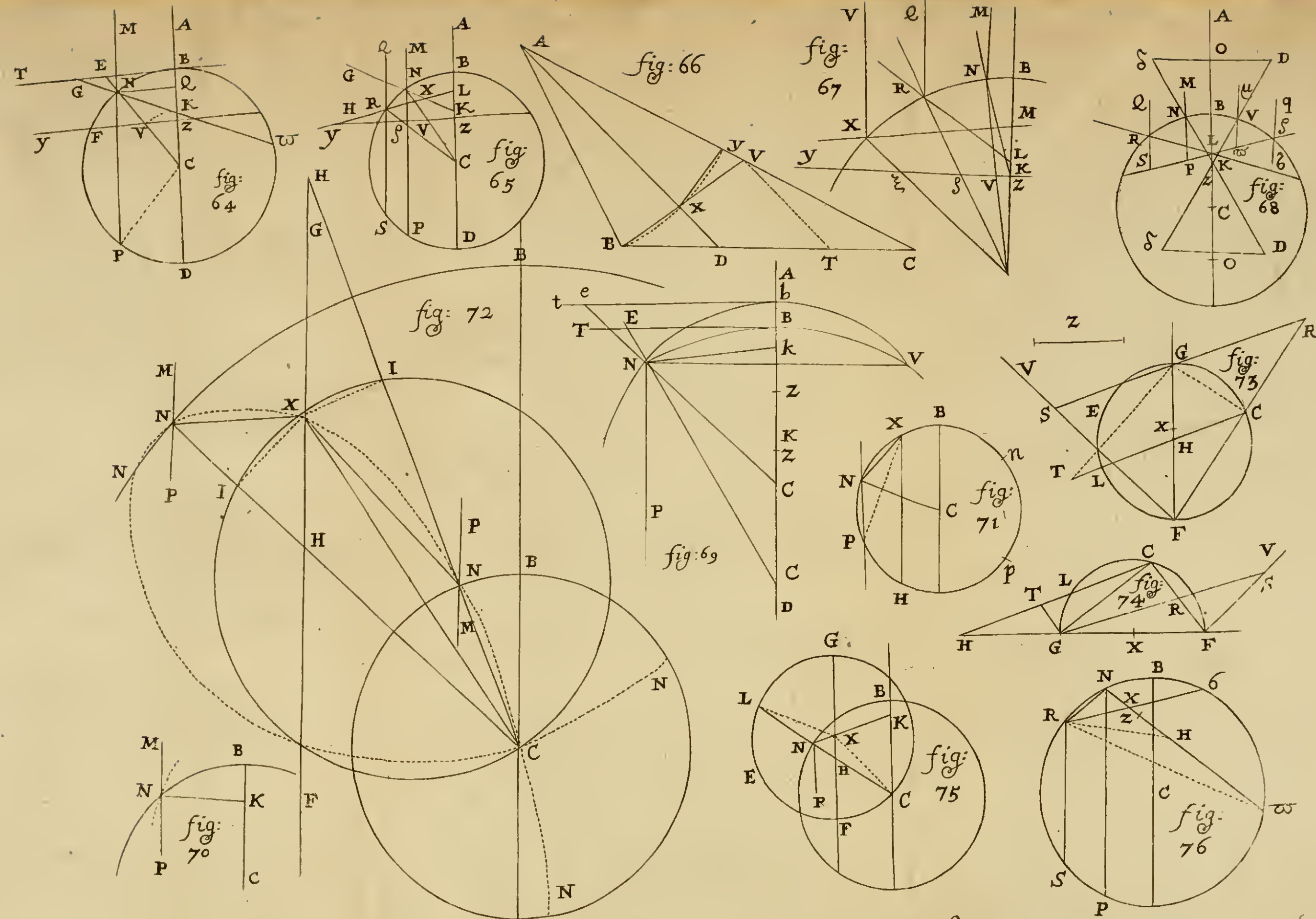
Fig. 77. XV. Quinetiam ipsi $N\varpi$ propiùs adjacentium occursus puncto Z viciniores sunt, hinc indè. Secent, inquam, radiorum LM, RS reflexi $L\mu$, $R\sigma$ ipsam $N\varpi$ punctis Y, X; istæ quidem (rectior) in Y, hic (obliquior) in X; erit $ZY \sqsupset ZX$. Nam connectantur $R\varpi$, $L\varpi$; & fiat ang. $\varpi LH =$ ang. $N\varpi L$; ducantúrque rectæ RH, RY. estque $RH \sqsubset LH = H\varpi$; adeóque ang. $H\varpi R \sqsubset$ ang. $HR\varpi$; & proinde ang. $NHR \sqsupset 2$ ang. $H\varpi R$. item $YR \sqsubset YL = YH$; proindéque rursus ang. $NYR \sqsupset 2$ ang. YHR. quare multo minor est ang. NYR quadruplo $N\varpi R$ est autem ang. NXR quadruplus anguli $N\varpi R$; igitur ang. $NXR \sqsubset$ ang. NYR. ponatur jam, si fieri potest, punctum X ipsis Y, Z interjacere. erit igitur angulus externus NYR interno NXR major; atqui minor ostensus est. quæ repugnant. itaque potiùs est $ZY \sqsupset ZX$: Q. E. D.

Ad alteras partes haud absimilis erit discursus; parco fastidiosæ repetitioni. ||

XVI. Hinc obiter patet ad easdem partes incidentium reflexos sese priùs (velut ad φ) quàm ipsum $N\varpi$ decussare.

XVII. Quinimò rursus hinc constat ad easdem axis partes plures duobus in uno puncto reflexos non concurrere.

XVIII. Demùm (ut aliquando tandem destinatum attingamus scopum) è dictis


fig: 64
fig: 65
fig: 66
fig: 67
fig: 68
fig: 72
fig: 69
fig: 73
fig: 71
fig: 74
fig: 70
fig: 75
fig: 76

Opt pag 56

è dictis colligatur licet, quòd oculo, cujus Centrum O uspiam in ipsa N ϖ ponitur, circa punctum Z (ipsam N ϖ prænotato modo quadrisecans) radiantis imago conspicietur. Sit enim pupillæ (prout antehac aliquoties) diameter E F; per eujusce terminos transeant radiorum L M, R S reflexi L E, R F; quorum iste secet ipsum N ϖ in Y, hic in X. quoniam igitur radiorum obliquiorum ipso R S, rectiorum ipso L M nullus oculum intrabit; utì suprà non semel argumentati sumus, intra spatium X Y necessariò consistet imago. quinetiam cùm radiorum arcui L R incidentium qui prope punctum Z reflectuntur axi N ϖ propiùs adjacentes perpendiculariùs oculum feriunt, ìdque spissiùs (ut ex analogia par est existimare; nec enim id operosiùs aggrediar demonstrare) propter aliquoties expositas causas ab eo videbuntur obtutum afficientes radii promanare; hoc est ad ipsum imago consistet. Accedit quod ob angustiam pupillæ spatium X Y satìs modicum existit; ut puncti modum vix excedere videatur. Fig. 78.

XIX. Subdo; si statuatur oculi centrum uspiam in Z N; ísque versus partes N obvertatur; objectum confusiùs apparere; quippe cùm reflexi visum convergentes appellant; vel quoniam imago Z tunc pone visum consistit.

XX. Hinc à speculo Cavo tantùm una repræsentatur Imago, saltem bene distincta. Nam in duorum reflexorum N ϖ, R σ concursu X statuatur oculi centrum; & sit $R\zeta = \frac{1}{4} R\sigma$; unde $R\zeta \sqsupset RX$. itaque spectabitur quæ ad ζ imago ab oculo in X collocato, versúsque partes N R obverso; sed tum imago Z post oculum consistit.

XXI. Et hæc quidem rectè percepta, serióquè perpensa vix addubito quin facilè sibi fidem conciliatura sint; nihil ut sit opus adversantia *seu veterum Opticorum decreta, seu recentiorum Commenta pluribus convellere*; quæ certè cùm nullâ perspicuâ ratione nituntur, tum ab experientia plerumque discordant. Cætera verò siqua restant ad hoc argumentum spectantia studio vestro commendabimus elicienda; mox ad è sensibiliter finita distantia radiantis puncti *Symptomata* similiter exploranda animum adjecturi.

LECT. VIII.

I QUæ radiis obveniunt à longinquo puncto manantibus, adeóque quasi parallelis, ex reflectione peripheriam ad circularem peractâ; ubinam & quousque vel sibimet ipsis occurrunt, vel axem intersecant; quo loco radians oculo ubicunque constituto repræsentant, in postremis est dissertatum. ad punctum jam accedimus radios ejiciens sensibiliter divergentes. Et hujusmodi quidem puncto, quanquam seu in obversas circuli Convexas partes seu ad concavas radiet communia pleraque symptomata conveniunt; tamen communi fretus *Opticorum* exemplo, præsertímque majoris evidentiæ causâ, casus istos distinctè prosequemur; illum fusiùs imprimis, hunc aliquanto concisiùs. ad rem.

II. In circuli BNP (cujus centrum C) convexum à puncto A quilibet incidat radius AN, ísque reflectatur in NG; patet reflexum GN productum axi AC occursurum. nam ductâ CNE patet GN productum angulum ANC secare; nec non ideò trianguli ANC basin AC; puta in K; quo posito.

III. Dico fore AC . AN :: KC . KN. Nam ducatur KH ad CN parallela. est igitur ang. KHN = CNP = CNK = NKH. hoc etiam è superius generatim ostensis consectatur. adeóque NH = NK. itâque cùm sit AC . AN :: KC . HN. erit etiam AC . AN :: KC . KN.

IV. Corollarii loco notetur (ductâ CP) fore NH = NK; & triangula HNK, NCP assimilari; vel esse HK . HN :: NP . CN.

V. Porrò, constantibus iisdem, dico fore AC . KC :: ACq — ANq . CNq. Nam est NP . CN + AN . CN = HK . HN + AN . CN = HK × AN . HN × CN = AN . HN

+

$+ HK.CN. = AC.KC + AK.AC = AK.KC$. verùm est $NP.CN + AN.CN = NP \times AN.CNq$. ergò erit $AK.KC :: NP \times AN.CNq$. componendóque $AC.KC :: NP \times AN + CNq.CNq$. cum sit igitur $NP \times AN = AP \times AN - ANq$. & $AP \times AN = ACq - CNq$; adeóque $NP \times AN + CNq = ACq - CNq - ANq + CNq; = ACq - ANq$. erit $AC.KC :: ACq - ANq.CNq$: Quod E. D. Fig. 79, 80.

Coroll. $AK.KC :: AN \times NP.CNq$.

VI. Etiam hoc *Theorema* subdemus: Si fiat $2\,CA.CN :: CN.E$. & $2\,CK.CN :: CN.F$; & sumatur $CQ = E + F$; erit ducta NQ ad CA perpendicularis. vel reciprocè; posito quòd sit NQ ad CA perpendicularis; erit $CQ = E + F$. || Nam (ut hoc posterius ostendamus) quoniam est $2\,CA.CN :: CN.E$. & $CN.2\,CK :: F.CN$. erit ex æquo perturbatè $2\,CA.2\,CK :: F.E$. vel $CA.CK :: F.E$. componendóque $CA + CK.CK :: F + E.E$. Porrò quoniam est $ANq = ACq + CNq - 2\,AC \times CQ$; erit $2\,AC \times CQ - CNq = ACq - ANq$. itaque (juxta præcedentem) erit $2\,AC \times CQ - CNq.CNq :: AC.CK$. hoc est (ob $CNq = 2\,AC \times E$) $2\,AC \times CQ - 2\,AC \times E.2\,AC \times E :: AC.CK$. hoc est $CQ - E.E :: AC.CK$. vel componendo $CQ.E :: AC + CK.CK$. erat autem $AC + CK.CK :: F + E.E$. ergò $CQ = F + E$: Quod E. D.

VII. Ex istis porrò deducetur, si dividatur Semidiameter BC in Z, ut sit $AC.AB :: CZ.BZ$; punctum Z limes erit citra quem (respectu centri C) nullus hujusmodi reflexus axem decussabit. Cujusvis, inquam, radii AN esto reflexus GN; axi occurrens in K. dico fore $CK \sqsubset CZ$. |Nam ob hypothesin (permutandóque) est $AC.CZ :: AB.BZ$. igitur (antecedentes, & consequentes copulando) $AC.CZ :: AC + AB.CB$. quare (posterioris hujusce rationis utrumque terminum in æquales $AC - AB$, & BC ducendo) erit $AC.CZ :: ACq - ABq.CBq$. est autem $ACq - ABq \sqsubset ACq - ANq$; adeóque $ACq - ABq.CBq. \sqsubset ACq - ANq.CBq :: AC.CK$ (è mox ostensis hoc) quapropter erit $AC.CZ \sqsubset AC.CK$. indéque $CK \sqsubset CZ$: Fig. 81, 82.
Q. E. D.

VIII. Aliter hoc idem; ut quibusdam fortasse videbitur, minùs involutè: per N ducatur VT circulum contingens. & quoniam NT

bisecat angulum ANK; erit $AN . NK :: AT . TK . \sqsupset AB . BK$. quare $BZ . AB + AN . NK \sqsupset BZ . AB + AB . BK$ (communem adsciscendo rationem BZ ad AB). est autem $BZ . AB + AN . NK = CZ . AC + AC . CK = CZ . CK$ & $BZ . AB + AB . BK = BZ . BK$. ergo $CZ . CK \sqsupset BZ . BK$. permutandóque $CZ . BZ \sqsupset CK . BK$. quin & componendo $CB . BZ \sqsupset CB . BK$. ideóque $BZ \sqsubset BK$; quare punctum Z centro propinquius est, quàm ipsum K: Q. E. D.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ fuerint limites punctorum radiantium A, α (quorum A sit à speculo remotiùs, quàm α) erit $CZ \sqsupset C\zeta$. Nam est $BC . AB \sqsupset BC, \alpha B$. adeóque compositè $AC . AB \sqsupset \alpha C . \alpha B$. hoc est $CZ . BZ \sqsupset C\zeta . B\zeta$. quare componendo $BC . BZ \sqsupset BC . B\zeta$. & indè $BZ \sqsubset B\zeta$.

IX. Porrò, consectatur è præmissis, quòd si duorum quorumvis incidentium AN, AR reflexi GN, HR axem intersecent punctis K, L; erit $CL, CK :: ACq - ANq . ACq - ARq$. || Nam quoniam est $AC . CK :: ACq - ANq . CBq$. itémque $CL . AC :: CBq . ACq - ARq$. erit ex æquo perturbatè $CL . CK :: ACq - ANq . ACq - ARq$.

X. Simili planè discursu, si fuerit $AC . AB :: CZ . ZB$; erit $CZ . CK :: ACq - ANq . ACq - ABq$. & $CL . CZ :: ACq - ARq . ACq - ABq$.

XI. Hinc perspicuum est obliquioris reflexi concursum à centro magìs elongari quàm rectioris; quòd nempe sit $CL \sqsubset CK$. Cùm enim sit $ACq - ANq \sqsubset ACq - ARq$; erit $CL \sqsubset CK$.

XII. Hinc necessariò duo quilibet ad easdem axis partes incidentium reflexi (quales NK, RL) sese priùs quàm axem intersecabunt, puta ad X. quo posito.

XIII. Adnotari potest angulum GXH vel KXL (à reflexis occurrentibus inclusum) æquari angulo NCR unà cum differentia angulorum incidentiæ; vel, duplo angulo NCR unà cum ang. NAR. || Etenim
Fig. 83. ang. KXL = ang. $ALR - AKN$ = ang. $ACR + CRL -$: ang. $ACN + CNK$ = ang. $ACR - ACN +$: ang $CRL - CNK$ = ang $NCR +$: ang $CRS - CNP$. || Quinetiam ang. $CRS - CNP$ = ang. $RCA + CAR -$: ang. $NCA +$
CAN

CAN = ang. NCR + NAR. itaque rursus ang. KXL = 2 ang. NCR + ang. NAR. liquent igitur quæ proposita sunt; in usum (si fortè) sequentium. pro quibus itidem hæc proponenda sunt.

XIV. Etiam palàm est è dictis ipsos reflexos GN, HR directè Fig. 83.
procurrentes à se divergere; adeóque duntaxat unum hujusmodi reflexum oculi centrum transire; consequentèr & puncti A tantùm unam à convexo speculo imaginem exhiberi.

XV. *Lemmatia* 1. Sint quæcunque tria quanta A, B, C; primóque sit $A . B \sqsubset B . C$; dico fore $A + C \sqsubset 2 B$. ponatur enim fore $A . B :: B . E$. erit ergò $A + E \sqsubset 2 B$. quinetiam erit ergò $B . E \sqsubset B . C$ adeóque $C \sqsubset E$. ergò magis $A + C \sqsubset 2 B$.

2. Sit (iisdem adhibitis quantis) secundò $A + C \sqsupset 2 B$. dico fore $A . B \sqsupset B . C$. nam sive dicatur esse $A . B :: B . C$. vel $A . B \sqsubset B . C$. sequetur utrobique fore $A + C \sqsubset 2 B$; contra hypothesin. itaque potiùs est $A . B \sqsupset B . C$.

XVI. Etiam hóc adjungo. Si duo sumantur ad easdem axi partes Fig. 84.
(circulíque convexâ parte comprehensi) sibimet æquales arcus NR, RX; & ducantur rectæ AN, AR, AX; erit $ANq + AXq \sqsubset 2 ARq$.

Nam ducantur CN, CR, CX; & demittantur ad AC perpendiculares NE, RF, XG; sint item NP, RQ ad AC parallelæ ducantúrque subtensæ NR, RX.; & quoniam ang. $RXQ \sqsubset$ ang. NRP; patet esse $RX . RQ \sqsupset NR . NP$; adeóque cùm $RX = NR$, erit $RQ \sqsubset NP$; hoc est $FG \sqsubset EF$. ergò $2 CF \sqsubset CE + CG$; unde $4 AC \times CF \sqsubset 2 AC \times CE + 2 AC \times CG$ atqui est $ANq = ACq + CNq - 2 AC \times CE$. & $AXq = ACq + CNq - 2 AC \times CG$. & $2 ARq = 2 ACq + 2 CNq - 4 AC \times CF$. ergo $ANq + AXq \sqsubset 2 ARq$.

Addo, sequentium gratiâ, si punctum A sumatur ad alteras (infra centrum) partes; & reliqua similiter apparentur; fore contrà, tum $ANq + AXq \sqsupset 2 ARq$. nam in eo casu est $ANq + AXq = 2 ACq + 2 CNq + 2 AC \times CE + 2 AC \times CG$. & $2 ARq = 2 ACq + 2 CNq + 4 AC \times CF$. unde liquet propositum.

XVII. Sint jam ad easdem axis partes duo quilibet æquales arcus

NR,

NR, RX; & incidentium AN, AR, AX reflexi GN, HR, IX axi occurrant producti punctis K, L, M; erit intervallum ML ab obliquiorum occursibus conclusum majus ipso LK rectiorum occursibus intercepto. Fig. 85.

Nam quoniam est $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$. erit $2ACq - ANq - AXq \sqsupset 2ACq - 2ARq$. adeóque $ACq - AXq \,.\, ACq - ARq \sqsupset ACq - ARq \,.\, ACq - ANq$. hoc est, è præmonstratis, $CL \,.\, CM \sqsupset CK \,.\, CL$; vel inversè $CM \,.\, CL \sqsubset CL \,.\, CK$. quapropter erit $CM + CK \sqsubset 2CL$. & ideò $CM - CL \sqsubset CL - CK$ hoc est $ML \sqsubset LK$: Q.E.D.

XVIII. Hinc constat, etiam in hac hypothesi, rectiùs incidentem lucem à reflectione magìs inspissari; seu spatio versus limitem Z arctiore constringi.

XIX. Quin ab his demum omnibus colligitur, si uspiam in axe (velut ad O) constituatur oculi centrum, quòd punctum A necessariò circa limitem Z apparebit. Etenim (prorsus ut in præcedente quoad radios ab infinitè dissito puncto manantes hypothesi) ab axis illi puncto adjacente parte radii cùm copiosiores, tum axi viciniores, oculóque rectiores, efficaciâ proinde præpollentes, nec non qui faciliùs re-adunentur, provenire videntur. quæ nempe cuncta simul ac emergentem propositi consequentiam abunde, puto, dedimus enucleata. Succedit ut hâc parte defuncti pro visu extra radiationis axem collocato itidem imaginis sedem definiamus. veruntamen hæc, quanquam haud ità quantitate multa, pro rei tamen obscuritate fortassis nimia videbuntur. itaque jam opportunum autumo desistere. Fig. 85.

Lect.

Lect. IX.

I. Qualiter in obversum Speculi circularis convexum finitè distans punctum radiat, & ubi loci adparet oculo in recta constituto per ipsum radians & speculi centrum trajecta postremò connisi demonstrare; nunc idem quoad aspectum aliàs ubicunque situm aggredimur expiscari. quò primum attinet ut rectam investigemus, in qua consistet Imago; tum ut punctum ejus in ista recta præcisum determinemus. & primo quidem negotio satisfactum erit hujusmodi *Problema* conficiendo; quod (sequentium quoque gratiâ) generatim proponimus.

II. *Dato circulo reflectente* (cujus centrum C) *datísque binis punctis; ab horum uno recta ducatur, cujus reflexus per alterum transeat.*

1. Si data puncta (puta A, X) sint ambo in circuli peripheria, manifestum est bisecto arcu A X in N, connexísque subtensis N A, N X, rectas N A, N X sibi mutuò reflexas fore; seu, junctâ C N, angulum C N X angulo C N A æquari. Fig. 86.

2. Etiam si datorum unum (X) in circumferentia ponatur; liquet, connexis A X, C X, factóque angulo C X H = C X A, fore X A, X H alterum alterius reflexum. Fig. 87.

3. Item si data puncta (A, X) æqualiter à centro distent; connexis rectis A C, X C, bisectóque angulo X C A à recta C N circulum reflectentem intersecante ad N; perspicuum est conjunctas rectas A N, X N, invicem in se reflecti; vel angulum C N X ipsi C N A æquari. Fig. 88.

III. 4. Si puncta data (puta jam A, K) ambo existant in recta per reflectentis centrum transeunte (nempe A B K C.)

1. Fiat C K . A C : : C B . T . ac inter C B, & T sit proportione media V (unde C B q . V q : : C B . T : : C K . A C) . tum centro A, intervallo √ : : A C q — V q . describatur circulus reflectentem Fig. 89.

secan-

fecans in N; & per N ducatur KNG; hæc ipſius AN reflexa erit.

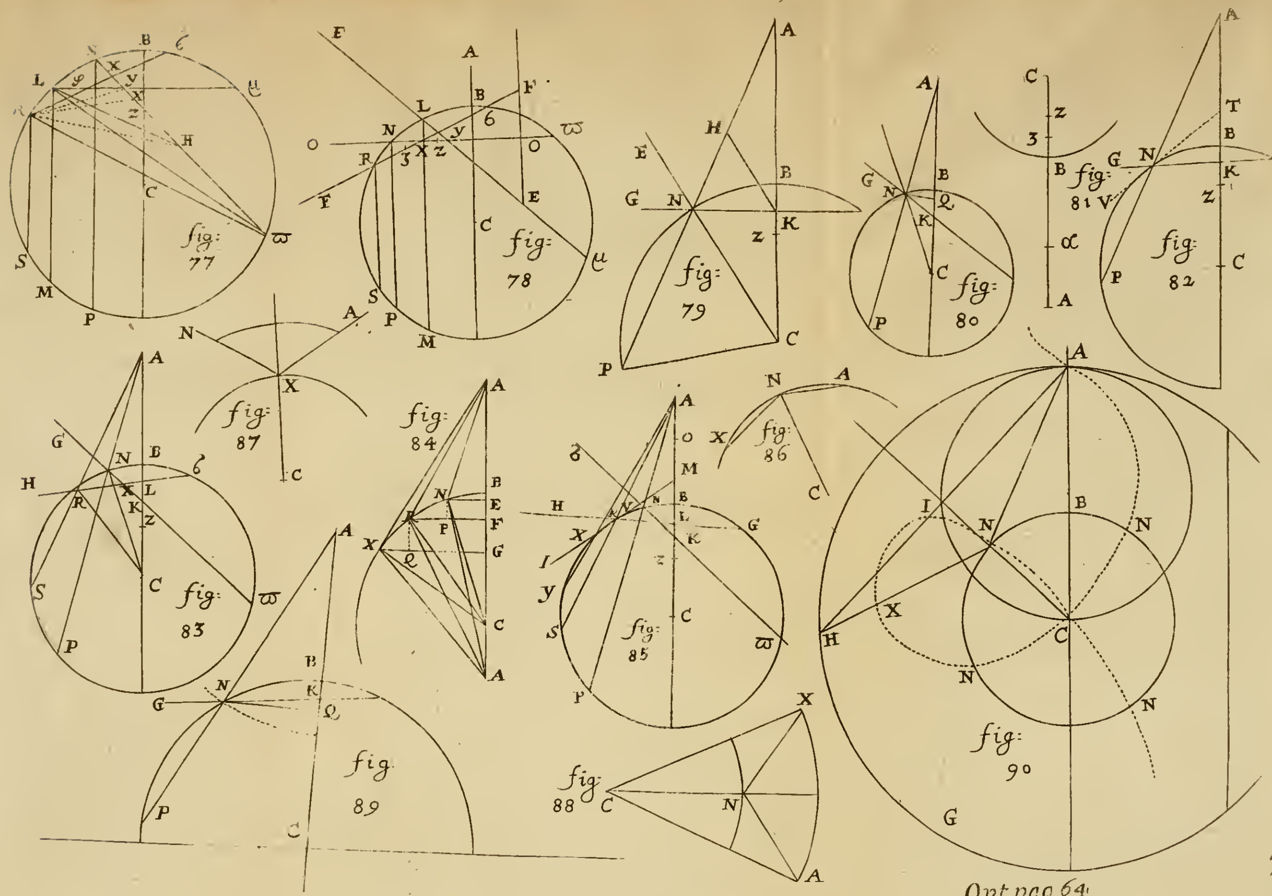
Nam ob $ANq = ACq - Vq$. erit $Vq = ACq - ANq$.
Fig. 89. adeóque $CBq . ACq - ANq :: (CBq . Vq ::) CK . AC$. quod, è præmonſtratis, reflectioni proprium eſt. ergò liquet propoſitum.

2. Ità quidem in hoc caſu; at ſi punctum A ponatur aliàs, ut ſit $AC \sqsupset AN$; reliquis ſtantibus, Sumendum erit intervallum $AN = \surd : ACq + Vq$; ut ſit $ANq - ACq = Vq$. ut poſthac conſtabit, ubi de concavis agemus. Aliter hoc idem. Fiat $2 CK . CB :: CB . E$. & $2 CA . CB :: CB . E$. ſumatúrque $CQ = E + F$. & ducta QN ad AC perpendicularis circulum ſecet in N. connexæ AN, KN altera alterius reflexa erit. hoc è ſuprà dictis liquidò conſectatur. At ſi fuerit $AN \sqsubset AC$; tum accipi debet $CQ = F - E$; & (reliquis nihil immutatis, utì poſtmodùm apparebit) factum erit.

IV. Intra caſus hos *Problema*, ceu videtis, facilè conſtruitur; aſt illos; alióſque ſpeciales, ſi qui ſunt, excipiendo, generaliter conceptum omnino Solidum eſt, & certè *δυσμήχανον*; vix ut aliud à *Geometris* hactenus attentatum difficilius reperiatur. Et primò quidem per lineam extrui, explicaríque poterit ſibi peculiarem, hoc vel adſimili modo deſcribendam.

Connexâ CA, ſuper diametrum CA deſcribatur circulus AIC; item ſemidiametro CA deſcribatur alter circulus AHG. tum à C educantur rectæ quotvis CI circulum AIC ſecantes punctis I; & per A, I ductæ rectæ circulum AHG ſecent punctis H; demum per H,
Fig. 90. & X rectæ ducantur ipſas CI decuſſantes punctis N. per hujuſmodi puncta quævis deſignabilia tranſibit linea, *Problematis* expoſiti ſolutioni accommodata. Sit enim ejus, ac reflectentis circuli quævis interſectio N (qualium certè pro reflectentis circuli magnitudine ſubinde quatuor, aliquando tres, modò binæ tantùm erunt) & connectatur AN. Et quoniam angulus CIA in Semicirculo rectus eſt, erit recta AH biſecta in I. adeóque triangula ANI, HNI ſibimet æqualia prorſus & æquiangala erunt; & ſpeciatim ang. $INA =$ ang. INX. unde patet propoſitum.

V. Verùm quoniam (ut pridem admonitum) hujuſmodi conſtructiones, etſi longè faciliores iis quæ per vulgò receptas lineas peraguntur, & *Problematum* naturam magis in propatulo collocantes à *Geometris* nihilo-


fig: 77
fig: 78
fig: 79
fig: 80
fig: 81
fig: 82
fig: 83
fig: 84
fig: 85
fig: 86
fig: 87
fig: 88
fig 89
fig: 90

Opt pag 64

7

nihilominùs gravatim admittuntur; iſtâ tantummodò raptim inſinuatâ, ſubnectemus aliam ab illorum guſtu non abhorrentem; illam nempe (quando ſcilicet haud alia melior ut varias pertentans analyſes, & hoc in alia complura *Problemata* transformans exiſtimari poſſum, facilè poſſit excogitari; quum & operæ meæ ſatis alioquin exercitatæ nonnunquam videatur parcendum) quam olim *Alhazenus Arabs* ſcriptis commendavit; ab horribili tamen illâ prolixitate ſimul ac obſcuritate; neque non ab incondita ſermonis barbarie nonnihil repurgatam. quorſum hoc præmittimus *Lemmaticum Problema.*

VI. Trianguli D P N angulus ad P rectus ſit; & in hujus uno crure P N adſignetur punctum F; per F recta ducenda eſt, quæ reliquum latus D P (protractam nempe) ac hypotenuſam D N ità ſecet, ut ab illis intercepta ad ſegmentum hypotenuſæ lateri primò contermінum datam obtineat proportionem R ad S. Fig. 91.

Hoc ità peragatur licet. Ducatur F H ad P D parallela. & Diametro H N deſcribatur Circulus H F N (is nempe per F tranſibit, ob angulum H F N rectum) tum connectatur D F; & fiat angulus F H I = ang. F D N. ſit etiam R . S : : D F . T . & à puncto I ducatur recta I L K diametrum H N interſecans ad L, & circulo occurrens in K, ità quidem ut ſit intercepta L K = T (hoc autem quomodò præſtetur in ſuperioribus oſtenſum) denuò per puncta K F trajiciatur recta C F, ipſam D P ſecans in X. Dico factum, vel ipſe C X . C N : : R . S. connectatur enim recta N K. & quoniam ang. F K I (vel F H I) = F D N, erit triangulum F D C ſimile triangulo L K C; ac indè F D . D C : : K L . C K. item ob ang. F K N = ang. F H N = ang. X D C; erunt triangula X D C, N K C ſibi quoque ſimilia, proindéque D C . C X : : C K . C N . quapropter erit ex æquali F D . C X : : K L . C N. vel permutando F D . C K : : C X . C N; hoc eſt F D . T (vel R . S) : : C X . C N; quod faciendum erat. *Conſtr. &.*

Advertendum eſt autem, quod datum punctum F in recta P N indefinitè protenſa variè ſtatui poteſt; vel nimirum inter puncta P, N; vel extra illa partes ad alterutras. item quòd in iſtorum caſuum ſingulo quoque recta I K (conditione gaudens præſtitutâ) plurifariàm duci poteſt; ut antehac inculcatum; unde plures emergent ſolutiones. at quoad omnes caſus perſimilis erit conſtructio, nec ferè diverſa demonſtratio. quare cur plura?

VIII. Proponatur jam circulus reflectens (is qui præ oculis, cujus

centrum C) datáque ſint duo puncta A, X; reperiendum eſt in circumferentia punctum aliquod; à quo ductæ ad A, X rectæ, altera ſit alterius reflexa. || Hoc ità perficimus:

Fig. 92, 93. Conjungantur rectæ AC, XC; & fiat (ſeorſim) ang. $\delta = \frac{1}{2}$ ang. ACX. & in $\xi\delta$ crure anguli δ ſumpto liberè puncto ϖ ducatur ϖV ad $\xi\delta$ perpendicularis alterum crus ſecans in V; & in $V\varpi$ protracta capiatur $\varpi\gamma = \varpi V$; tum dividatur γV in φ, ut ſit $\gamma\varphi . \varphi V :: XC . CA$;

Lem. præced. perque punctum φ trajiciatur $\kappa\xi$ ſic ut ſit $\kappa\xi . \kappa v :: CX . CN$. denique fiat angulus XCN æqualis angulo $\xi\kappa v$; erit punctum N quale deſideramus. Nam ducantur XN, ξv; & fiat ang. CNG = ang. $\kappa v \gamma$. adſumatúrque PG = PN; & connectatur XG. liquet jam trangula XCN, $\xi\kappa v$ ſimilia fore; nec non ipſa CNF, $\kappa v \varphi$; & ipſa XPF, $\xi\varpi\varphi$; ipſáque demùm XFN, $\xi\varphi v$ aſſimilari. quare PF . XF :: $\varpi\varphi . \xi\varphi$. & XF . FN :: $\xi\varphi . \varphi V$. & ex æquo PF . FN :: $\varpi\varphi . \varphi V$. & antecedentes duplando 2 PF . FN :: $2\varpi\varphi . \varphi V$. componendóque 2 PF + FN . FN :: $2\varpi\varphi + \varphi V . \varphi V$. hoc eſt GF . FN :: $\gamma\varphi . \varphi V$ (hoc eſt) :: XC . CA. ducatur jam NL ad XG parallela; quare eſt ang. LNG = ang. G = ang. XNG; & XG (XN) . NL :: GF . FN :: XC . CA. porrò fiat ang. LNH = ang. XCA; & HN protracta ipſi CA occurrat in M; éſtque propterea triangulum HNL ſimile triangulo HGM; idcircóque HC . CM :: HN . NL. ducatur denuò tangens NQ; eſtque tum ang. PNQ = rect — CNP = rect — $\kappa V \varpi$ = ang. $\delta = \frac{1}{2}$ XCA; vel 2 ang. PNQ = ang XCA = ang LNH. verùm erat priùs 2 ang. XNF = ang. XNL. ergo 2 ang XNF — 2 ang PNQ = ang XNL — ang. LNH. hoc eſt 2 ang XNQ = ang. XNH. ergo tangens NQ biſecat angulum XNH; indéque conſectatur fore rectam HM ipſius XN reflexam; ac ideò eſſe XC . HC :: XN . HN. atqui fuit priùs HC . CM :: HN . NL quare jam erit ex æquo XC . CM :: XN . NL (hoc eſt etiam è præmonſtratis) :: XC . CA. unde CM = CA. quapropter HM, ipſius XN reflexa tranſit per A: Quod propoſitum erat efficere. ||

VIII. Hujuſce *Problematis* ità generaliùs propoſiti varii quidem caſus ſunt (etenim vel data puncta jacent ambo extra circulum reflectentem; vel utrumque poſitum eſt intra circulum; vel unum intra jacet, alterum extra; quinetiam in horum caſuum unoquoque pluries conficitur negotium) aſt ubique non abſimilis erit conſtructio; ſanè nimius eſſem; meámque pariter ac veſtram patientiam macerarem omnes intricati *Problematis* nodos evolvendo; ſuffecerit ejuſce ſpecimen aliquod protuliſſe.

IX Adnotabimus tantùm quòd ex *Problematis* hujusce natura constructioneque proposita satìs attendenti constabit (utique sicut in *Hypothesibus* antehac tractatis uberiùs est declaratum) duorum tantùm ad easdem axis partes incidentium reflexos ad unum sese punctum decussare. nam aliorum unius (qui subinde potest dari) vel alterius reflexi per ejusmodi punctum transeuntes ad alteris partibus incidentes pertinebunt. || Ex his quadantenus elucescit datis puncti radiantis, oculíque positione designari potest linea quævis, in qua dicti puncti species apparebit; incumbit proximè punctum in ea præcisum determinare, ad quo eadem consistit. eo spectat hoc Theoremation.

X. Ab eodem quocunque puncto A manantes duo radii A N, A R in circuli reflectentis peripheria præter illum arcum N R (qui incidentiæ punctis interjacent) intercipiant arcum P S; eorum verò reflexi intercipiant arcum $\varpi\sigma$; erit arcus $\varpi\sigma$ æqualis Summæ vel differentiæ dupli arcûs N R, & arcûs P S. Nam (1) in prima figura; est $PS + SR + RN = PN = N\varpi = \varpi\sigma + \sigma R - RN$; ergò, pares hinc indè S R, & σ R subducendo, erit $PS + RN = \varpi\sigma - RN$. proindéque $PS + 2RN = \varpi\sigma$. (2). in altera figura; erit $PS + SR - RN = PN = N\varpi = RN + R\sigma - \sigma\varpi$. quarè rursus æquales auferendo S R, R σ manebit $PS - RN = RN - \sigma\varpi$ unde transponendo erit $\sigma\varpi = 2RN - PS$. Fig. 95, 96.

XI. Etiam hoc *Lemmation* adscribemus: Bisecetur recta N P in E; & ubivis sumatur punctum A; erit $EA = \frac{PA \pm: NA}{2}$. Nam Fig. 94.

$$EA = \frac{PN}{2} \pm: AN = \frac{PN \pm: 2AN}{2} = \frac{PA \pm: AN}{2}.$$

XII. Exhinc, ut propositum citiùs attingamus, Supposito radiós A N, A R (quoad casum præsentem) sibi quàm proximos incidere, punctum designabimus ad quod ipsorum reflexi N ϖ, R σ concurrunt; dicimus utique si dicti reflexi concurrant ad Z; bisectis subtensis N P, N ϖ in E, & F; fore F Z . Z N :: E A . N A. || Nam quoniam arcus N R, P S ex hypothesi sunt indefinitè parvi (seu minimi) se habebunt ut suæ subtensæ; nec non idem de arcubus N R, $\varpi\sigma$ dici potest. igitur arc. P S . R N :: P S . R N :: P A . R A. (hoc est ob R A, N A nihil, ex eadem hypothesi, differentes) :: P A . N A. ergò, bis componendo, erit $PS + 2RN . RN :: PA + 2NA . NA$. Fig. 95, 96.

 hoc

hoc est $\sigma\varpi . RN :: PA + 2NA . NA$. est autem arc $\sigma\varpi . RN ::$ subtensa $\sigma\varpi . RN :: \varpi Z . ZR :: \varpi Z . ZN$. ergo $\varpi Z . ZN :: PA + 2NA . NA$. & componendo $\varpi N . ZN :: PA + 3NA . NA$ & antecedentes subduplando $FN . ZN :: \frac{PA + 3NA}{2} . NA$. denique dividendo $FZ . ZN :: \frac{PA + NA}{2} . NA$. est autem $EA = \frac{PA + NA}{2}$. ergò tandem est $FZ . ZN :: EA . NA$: Q.E.D.

XIII. Hinc colligitur punctum Z esse locum ipsissimum, circa quem puncti Z imago consistit; oculi respectu in reflexo $GN\varpi$ constituti,
Fig. 95, 96. tanquam ad O. etenim superiùs nec semel argumentis, ut mihi videtur, admodum luculentis adfirmatum est (ut jam ad instar regulæ legísve ratum, fixúmque censeri queat) isthic imaginem versari, ubi propiorum incidenti principali (hoc est ei cujus reflexus oculi centrum transiens axis Optici vicem subit) radiorum reflexi principalem illum reflexum intersecant; itaque circa Z in hoc casu versatur.

XIV. Et hoc argumentatione collegi, non illâ quidem incertâ vel ambiguâ, sed nec ad *Geometrici* rigoris amussim præ illa quam in præcedentibus usurpavi (quanquam & hæc è cognatis fontibus profluxerit) adeò exactâ; concisâ tamen, & facili, talíque quæ conclusionis adsertæ causam apprimè detegit. Enim verò si pleraque cuncta, quæ se oggerunt huc attinentia, minutatim ac morosè persequi vellem, immane quantum tædii (commodo vestro fortassè non tanto) mihimet accerserem, & temporis plurimum vestri pariter ac mei exhaurirem. suffecerit itaque jam, & posthac in reliquis Hypothesibus sufficiat, viâ quàm brevissimâ (modò tamen certissimâ) metam attingere. De convexis hactenus; ad concava proximè nos conferemus, aliquanto breviùs exponenda. ||

LECT. X.

I. IN postrema Lectione quod spectavimus punctum circuli convexo alluxit; nunc partes concavas irradians aliud, at magìs ἐν πλάτει, contemplabimur. & quidem casuum præcipuorum diversitatem imprimìs distinguemus. Nempe radiet punctum A in circulum reflectentem, cujus centrum C; connexaque recta A C protendatur indefinitè; quo posito.

II. 1. Incidat radius A N; & sit $AN = AC$; erit ipsius A N reflexus, puta $N\alpha$, ad A C parallelus. Fig. 97.

Hoc è supra generatim ostensis constat; & facilè jam patet, connexâ C A. etenim est ang. $ACN = ANC$; ob A C, A N, ex Hypothesi pares; & ang. $ANC = \alpha NC$, propter reflectionem; adeóque ang. $ACN = \alpha NC$; unde sunt A C, $N\alpha$ sibi parallelæ.

III. 2. Incidat radius A M major ipsâ A C; ejus reflexus (puta $M\alpha$) cum axe directè procedens conveniet ultra centrum, respectu puncti A; (hoc est centrum C puncto radianti, concursuíque interjacebit). Fig. 98.

Nam ob $AM \sqsubset AC$, erit ang. $ACM \sqsubset AMC = CM\alpha$; ergò ang. $BCM + CM\alpha \sqsupset$ ang. $BCM + ACM = 2$ rect. quare $M\alpha$, C B convenient infra C M ad partes α B; velut ad K.

IV. 3. Incidat radius A R; & sit A R minor ipsâ A C; ejus reflexus, puta $R\alpha$, axi retrò protractus occurret. (hoc est ut radians centro, concursuíque sit interjectum). Fig. 99.

Nam hic ob $AR \sqsupset AC$; erit ang. $ACR \sqsupset$ ang $ARC =$ ang. αRC. quapropter ang. $DCR + \alpha RC \sqsubset 2$ rect. unde patet ipsas D C, αR portractas infra C R concurrere.

V. Horum

V. Horum casuum primus ad unum duntaxat ab una axis parte radium pertinet, qui reliquos aliis casibus convenientes medius disterminat. Fig. 101. de posteribus itaque duobus separatim paullò dispiciamus; Sit jam itaque primò $AC = AG = A\gamma$; unde quilibet incidens cavo $GB\gamma$ radius (ut AN) major erit quam AC; hujus itaque reflexus axem secet puncto K; dico, si semidiameter CB dividatur in Z; ut sit $CZ.$ Fig. 100. $ZB :: AC . AB$; fore $CK \sqsubset CZ$. etenim ob angulum ANK bisectum, erit $AC . CK :: AN . NK$. vel permutando $AC . AN :: CK . NK$. est autem $AC . AB \sqsupset AC . AN$ ergo $AC . AB \sqsupset CK . NK \sqsupset CK . BK$. ergò cùm sit, ex hypothesi, $CZ . ZB :: AC . AB$; erit $CZ . ZB \sqsupset CK . BK$. componendóque $CB . ZB . \sqsupset CB . KB$. unde $ZB \sqsubset KB$; seu $CZ \sqsupset CK$: Q. E. D.

VI. Hinc punctum Z est limes infra quem, Versus centrum, nullus reflexus axem intersecat.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ sint limites punctorum A, α (quorum A remotius) erit $CZ \sqsubset C\zeta$.

Nam $BC . AC \sqsupset BC . \alpha C$. componendóque $AB . AC \sqsupset \alpha B . \alpha C$. hoc est $ZB . ZC \sqsupset \zeta B . \zeta C$. vel compositè $CB . ZC \sqsupset CB . \zeta C$. ergò $ZC \sqsubset \zeta C$.

VII. Quinetiam erit in hoc casu; $ANq - ACq . CNq :: AC . CK$. Nam ducatur KH ad CN parallela, protractæ AN occurrens in H; & connectatur CP; & eodem planè modo quo superiùs (in iis quæ circa convexas partes attigimus) ostendetur fore $AN \times NP . CNq :: AK . CK$. unde divisim erit $AN \times NP - CNq . CNq :: AC . CK$. est autem $AN \times NP = ANq - AN \times AP = ANq - : ACq - CNq = ANq - ACq + CNq$; adeóque $AN \times NP - CNq = ANq - ACq$. ergò demum erit $ANq - ACq . CNq :: AC . CK$: Q. E. D.

Notetur; si fuerit AC minor semisse semidiametri circuli reflectentis, quòd punctum A duos focos habebit ad easdem centri partes, quorum alter ad partes D, alter ad B pertinebit; sin AC major fuerit istâ Semisse, focis qui ad diversos vertices B, & D pertinent, centrum C interjacebit.

VIII. Etiam hoc interseram *Theorema*, præmissis conforme: Si fiat $2\,\underline{CK} . \underline{CN} :: \underline{CN} . F$; itémque $2\,\underline{CA} . \underline{CN} :: \underline{CN} . E$;

&

& demittatur NQ ad AC perpendicularis, erit $CQ = F - E$. Nam (ut suprà) est $CA . CK :: F . E$. quare dividendo erit $CA - CK . CK :: F - E . E$. Item hic erit $ANq - ACq = 2\,AC \times CQ + CNq$. adeóque $2\,AC \times CQ + CNq . CNq :: AC . CK$. hoc est, (ob $CNq = 2\,AC \times E$.) $2\,AC \times CQ + 2\,AC \times E . 2\,AC \times E :: AC . CK$. hoc est $CQ + E . E :: AC . CK$. quare dividendo $CQ . E :: AC - CK . CK$. ergò $F - E = CQ$: Q.E.D.

IX. Porrò, si duorum quorumvis radiorum AN, AR reflexi NK, RL axem secent punctis K, L; erit $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$. Nam ob $CK . AC :: CNq . ANq - ACq$, & $AC . CL :: ARq - ACq . CNq$. erit ex æquo perturbatè $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$.

X. Hinc si radius AR sit ipso AN obliquior; erit $CK \sqsupset CL$: Nam $ARq - ACq \sqsupset ANq - ACq$.

XI. Hinc palàm est reflexos NK, RL sese priùs quàm axem decussare.

XII. Accipiantur porrò bini pares arcus NR, RX; & incidentium AN, AR, AX reflexi cum axe conveniant punctis K, L, M; dico spatium LM, obliquiorum occursibus interjectum, majus esse spatio LK, quod rectiorum continetur occursibus. Nam è suprà monstratis constat esse $ANq + AXq \sqsupset 2\,ARq$. proindéque fore $ANq + AXq - 2\,ACq \sqsupset 2\,ARq - 2\,ACq$. ac indè $ANq - ACq . ARq - ACq \sqsupset ARq - ACq . AXq - ACq$. hoc est $CL . CK \sqsupset CM . CL$. vel $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quare $CM + CK \sqsubset 2\,CL$, & ideò $LM \sqsubset KL$. Fig. 102.

XIII. Hinc rectiùs ingruens lux à reflectione versus axem condensatior evadit.

XIV. Quidni demùm rursus ex his inferatur, visibilis A imaginem circa reflexorum metam Z, oculo uspiam in AZ constituto, apparere?

XV. Adversatur saltem (id quod experiendo deprehendetur) oculo uspiam in ZB collocato confusiorem apparentiam objici; quippe

cum

cùm eum tunc reflexi convergentes appellant ; & imago diſtinctior Z poſt oculum conſiſtat . quin ejuſmodi complures apparentias obſervabitis ipſi ſi lubet , & ex his deducetis ||

XVI. Præterea, *dato oculi centro , velut O, quomodo deſignandus ſit ipſum pervadens reflexus* (ceu N ϖ) è ſuprà tractatis aliquatenus
Fig. 103. adparet . nec inibi generaliùs expoſitum *Problema* libet hìc reponere.

XVII. Quinetiam antedicta recenſendo conſtabit, ſi biſecentur ſubtenſa PN in E ; & ſubtenſa N ϖ in F ; ac fiat FZ . ZN :: EA . NA ; radiantis imaginem , viſûs O reſpectu, circa punctum Z conſiſtere . planè ſimilis eſt diſcurſus, quorſum κακιζειν. ||

XVIII. Supereſt tantùm, ut de poſteriore quem innuebamus caſu paucula ſubdamus. Eò, ponatur $AC = AG = A\gamma$; indè quilibet incidens cavo $GB\gamma$ radius ipsâ AC minor erit ; ſit talis alicujus AN reflexus N ϖ ; qui nempe retrò productus cum axe conveniet ; puta ad K. Etiam hìc præcedentibus conformia deprehendentur , & ſuppari demonſtrabuntur modo ; qualia ſunt nempe

XIX. AC . AN :: CK . KN.

XX. ACq — ANq . CNq :: AC . CK.

XXI. Radii AR ipſo AN obliquioris reflexus cum axe concurrat in L ; erit CK . CL :: ACq — ARq . ACq — ANq . ac indè

XXII. $CK \sqsupset CL$.

XXIII. Incidentium rectiorum (pares , ut ſuperiùs , arcus in reflectente ſumendo) reflexi concurſus habent à ſe minoribus intervallis diſjunctos . hæc , inquam , & alia quoad reliquos caſus præmonſtratis conformia , vel agnata perſimili quoque quoad hunc caſum methodo comprobantur . quare pluribus tempero ; ſed enim id quod ubique præcipuum etiam hìc exertiùs oſtendam ; præmiſſo tamen hoc, ad ſequentia quoque concidenda non inutili, *Lemmatio :*

XXIV. Detur recta BC ; in ea protracta deſignandum eſt punctum,
Fig. 104. velut Z ; ità ut BZ ad CZ datam obtineat rationem, puta I ad R . ||
Id facilè ſic exequimur, || 1. Si

1. Si fuerit $I \sqsubset R$; fiat $I - R . R :: BC . CZ$; quare componendo erit $I . R :: BZ . CZ$. ergò factum. Fig. 105.

2. Sin $I \sqsupset R$; fiat $R - I . I :: BC . BZ$. ergò rursus componendo $R . I :: CZ . BZ$. vel inversè, $I . R :: BZ . CZ$.

XXV. Fiat jam $CA . AB :: CZ . BZ$; Dico punctum Z esse metam, citra quam (respectu centri C) nullus reflexus axem decussabit; hoc est præmissis insistendo, fore $CK \sqsubset CZ$.

Nam ducatur NT circulum contingens ad N. erit ergo $NK . NA :: KT . AT \sqsupset BK . AB$. quare $NK . NA + AB . BZ \sqsupset BK . AB + AB . BZ = BK . BZ$. est verò $NK . NA :: CK . CA$. & $AB . BZ :: CA . CZ$. ergò $CK . CA + CA . CZ \sqsupset BK . BZ$. hoc est $CK . CZ \sqsupset BK . BZ$. vel permutando $CK . BK \sqsupset CZ . BZ$. unde dividendo $CB . BK \sqsupset CB . BZ$. adeóque $BK \sqsubset BZ$. unde liquet propositum.

XXVI. Exhinc (ut in casibus antè pertractatis) consectatur ejusmodi punctum Z esse locum ipsissimum imaginis punctum A exhibentis oculo, puta O, in axe CA constituto; patétque quàm longè passim ab Opticis; nominatim à novissimis *Stevino*, *Hobbio*, *Fabrioq;* in eo assignando loco aberratur; quorum ex sententia versatur is ad punctum (puta Q) tanto semotum à vertice B intervallo, quanto radians A ab ipso B distat. id quod præterquam quòd nullâ verisimili ratione nititur (imò rationi prorsus adversatur; cùm nullus omnino radius oculum ingrediatur tanquam à puncto Q proveniens) experientiâ facilimè refutatur. Nam si tanquam circa punctum A accensa candela speculo cavo GBγ exponatur, oculo velut ad O sito longè majori distans intervallo conspicietur, quàm ipso BQ, quod ipsam AB exæquat. quinimò tantillo versus centrum illum adducendo non æquali distantiâ, sed admodum majori videbitur elongari; tantâ circiter ad sensum, probabilémque conjecturam; quantam proportio requirit à nobis præstituta. quo circà discursus noster experientiæ suffragio constabilitur.

XXVII. Quod demum attinet ad locum imaginis respectu visûs extra radiationis axem positi; determinatur is eodem ac in casibus antecedaneis modo, bisecando scilicet ipsas NP, Nϖ punctis E, F; faciendóque $EA . AN :: FZ . ZN$. Adnotandum saltem in rectioribus reflexis imaginem extra circulum consistere; sed in obliquioribus intra illum, nempe si fuerit $AE \sqsubset AN$ punctum Z ultra axem Fig. 106.

CB existet; sin AE ⊐ AN, punctum Z versus ϖ existet; sin AE = AN; concursus infinitè distabit; seu proximus reflexus ipsi Nϖ parallelus erit.

Not. ductâ AQ ad CB perpendiculari, si AE = AN; erit $AN = \sqrt{\frac{AQq}{3}}$. Nam $AQq = AP \times AN = 3AN \times AN$ Fig. 106. $= 3ANq$; itaque punctum N, istos casus disterminans, facilè designatur.

Rationem ipsi tantillùm attendentes perspicietis; mihi sanè cunctas evolvendo minutias non animi satìs, non otii suppetit.

XXVIII. Juvabit his unam, loco forsan opportuniore prætermissam, observatiunculam attexere. Si fuerit Z radiantis A Imago, vicissim erit A radiantis Z Imago. è dictis quoad speciales casus facilè cernitur hoc consectari. quin & hinc generatim verum apparebit satìs: Si fuerit Z ipsius A imago, tantum unus idcircò ab A manantium inflexus per Z transibit. (hoc imagini proprium esse sæpiùs in decursu inculcata satìs arguunt, superque) quare reciprocè solus unus ab Z manantium inflexus per A transibit (nam si duo tales per A transire dicantur, etiam indè duo per Z transibunt, contra hypothesin) erit igitur A ipsius Z imago. Merebatur hæc (compendio bene serviens, & casus inter se varios conferentibus affundens lucem) observatio generalibus intertexi; nisi quòd non omnia se nobis statim produnt; & quædam in abstractione summa non ità facilè vèl explicari possunt, vel comprobari.

A Catoptricis jam aliquando manum. quæ contentus ità quadantenus promovisse, haud disparia (certè magìs nova, miniméque protrita) circa refractiones sphæricas, seu circulares, attentabo.

Lect. XI.

I. C*Atoptricâ circulari defunctus ad Dioptricam promovemur*; quorsum incidentium quotcunque refractis unâ simulo perâ delineandis, adeóque refractionum symptomatis organicè pertentandis modum imprimìs exponemus, præ cæteris, opinor expeditum. Seorsim ad vγ æqualem diametro (NG) circuli refringentis describatur circulus v$\varpi\gamma$. item habeat vγ ad Sγ rationem illam, quæ refractiones determinat (illam autem deinceps, ut antehac, constanter nuncupabo rationem I ad R) & super diametro Sγ describatur quoque circulus SHγ. Incidat jam radius quilibet MNP, cui conveniens designandus est refractus. ut hoc assequamur, circulo adposito à V adaptetur vϖ = NP; & centro γ per ϖ descriptus circulus secet circulum SHγ in H; connexáque γH circulum v$\varpi\gamma$ intersecet in ξ. demùm connexâ vξ, circulo NPG accommodetur NX = vξ; erit NX ipsius NP refractus. Etenim (ductis GP, GX) est γH.$\gamma\xi$:: (γSγv::) I.R. hoc est $\gamma\varpi$.$\gamma\xi$::I.R. hoc est GP.GX::I.R. cùm itaque sint ipsæ GP, GX recti sinus angulorum GNϖ, GNX (quorum GNP est angulus incidentiæ) liquet propositum. Fig. 107. 108.

II. Ad ipsa *Symptomata* progrediamur exponenda radiis ad circulum refractis competentia; quorum illa pro more primò pertractabimus, quæ radianti puncto conveniunt ad infinitam quasi distantiam posito, seu parallelos ad sensum radios ejaculanti. Quocirca per circuli refringentis Centrum C punctúmque de longinquo radians protendatur recta ACZ, tum fiat BZ.CZ::I.R; nec non dividatur CZ in F, ut sit FZ.FC::I.R; & centro F per Z describatur circulus EGZ. his peractis, accipiatur jam quilibet ad AC parallelus MNP (convexis incidens an concavis partibus perinde fuerit) dico si recta NC (ab incidentiæ nempe puncto per refringentis centrum ducta) circulo EGZ protracta occurrat in G; & Fig. 109.

in axe capiatur CK = CG; connectatúrque recta NK, fore NK ipsius MNP refractum. Connectantur enim rectæ FG, BG; & quoniam est BZ.CZ:: (I.R::) FZ.FC; erit permutando
Fig. 109. BZ.FZ::CZ.FC. dividendóque BF.FZ::FZ.FC. itaque patet triangula BFG, GFC (latera scilicet habentia circa communem angulum GFC proportionalia) similia fore. quamobrem erit BG.GF::GC.CF. seu permutatim BG.GC ::GF.CF. hoc est BG.GC::FZ.CF::I.R. verùm in triangulis BCG, NCK est BC = CN, & CG = CK; & ang. BCG = NCK; adeóque BG.GC::NK.CK. quare erit quoque NK.CK::I.R. ergò, *secundum generatim antehac ostensa, liquet NK ipsius MN refractum existere.

* *Lect. 3. numero.* 10.

Coroll. Adnotetur esse triangula BFG, GFC similia; ac esse BG.CC::I.R.; & ang. BGF = GCF; & esse BF, FG, FC ∺ &c.

III. Ex hoc (sanè pulchro, perutilíque *Theoremate*) cùm particularis exoritur methodus hujusmodi quotcunque refractos expeditissimè seu delineandi, seu computandi; tum ipsorum præcipua *symptomata* facilimè discernuntur ac demonstrantur. qualia sunt, quæ in subjectis exhibentur *Corollariis*.

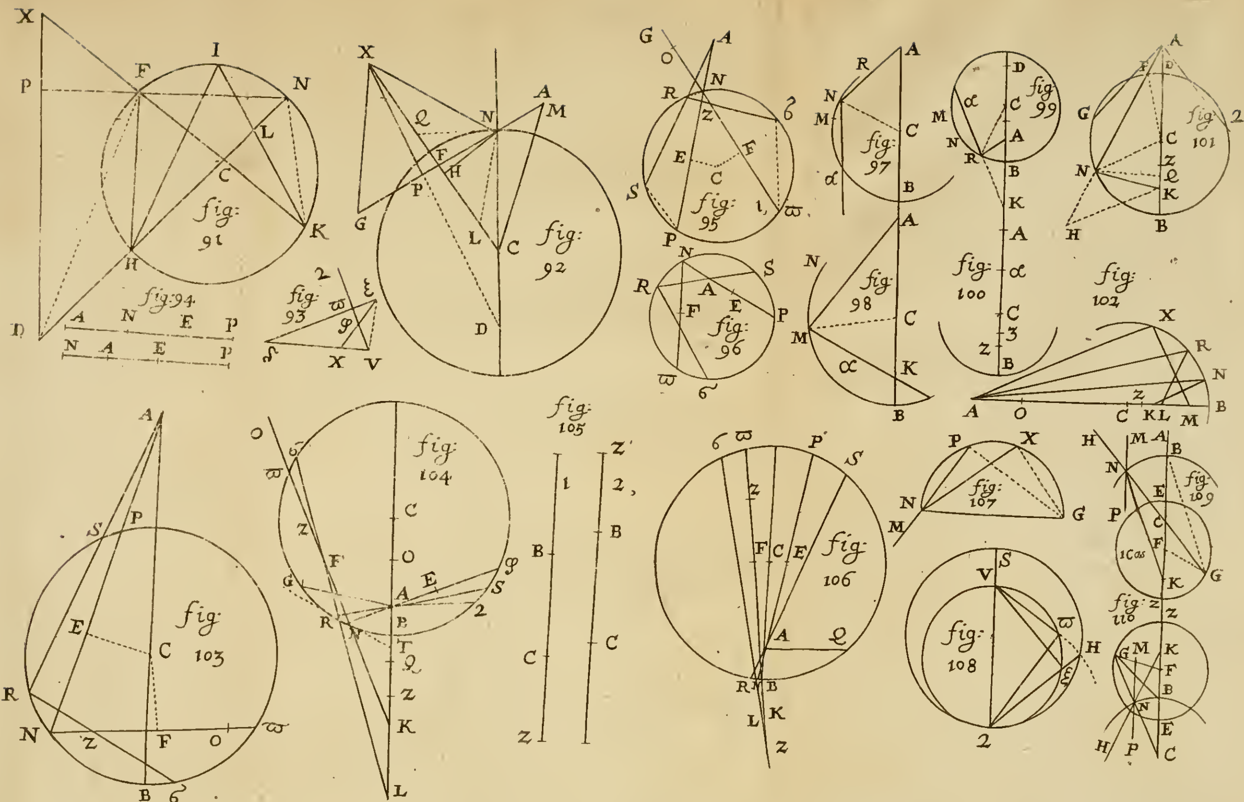
IV. Patet hinc punctum Z esse limitem ultra quem (respectu centri) nullus axem intersecat refractus; seu perpendicularis ipsius AB
Fig. 110. (vel ei saltem quàm proximè adjacentis radii) refractum ad Z terminari. quia nimirum est CZ ⊏ CG, vel CR.

V. Consequitur etiam, si duorum incidentium MN, QR (quorum QR sit obliquior) refracti conveniant cum axe punctis K, L, fore
Fig. 111. CK ⊏ CL. Etenim si rectæ NC, RC ad circulum refractarium (itâ circulum EGZ meritò subinde nominabimus) producantur, ut ipsum secent punctis G, H; liquet esse CG ⊏ CH; adeóque CK ⊏ CL. Hinc.

VI. Ad easdem partes incidentium refracti sese priùs intersecant quàm axem; (veluti puta refracti NK, RL sese decussant in X.)

Fig. 111. VII. Quinetiam, si in primo casu per centrum C ducatur recta VI ad BZ perpendicularis, dictóque circulo refractario occurrens ad I; & fiat CY = CI, patet punctum Y esse limitem refractionis

cite-


fig: 91
fig: 92
fig 93
fig:94
fig: 95
fig: 96
fig: 97
fig: 98
fig 99
fig: 100
fig 101
fig: 102
fig 103
fig: 104
fig: 105
fig: 106
fig: 107
fig: 108
fig: 109
fig: 110

citeriorem : erit enim connexa VY refractus obliquissimi radii, ceu TV, circulum refringentem contingentis.

VIII. Item, in secundo casu si recta CVI circulum EGZ tangat in I, & adsumatur $CY = CI$, erit punctum Y citimus alter refractorum limes. Etenim connexa VY refractus erit incidentis (puta VT) ad BC paralleli; qui certè cunctorum obliquissimus erit hujusmodi refractionem patientium. quum enim (*è præmissis) connexâ FI, sit FI. CF :: I. R. hoc est sinus rectus anguli FCI (vel anguli CVT) ad sinum totum, ut I ad R; nullus ipso TV obliquior medium BNV penetrabit; at ipse quicunque talis repercutietur; velut φ ψ in φ ξ. Fig. 112. *Lect. 3. num. 7.

IX. Cæterùm hîc (tametsi præter ordinem non nihil, extráque suum locum) egregiam quandam & præsertim notabilem istius, quem nuncupavimus, refractarii circuli proprietatem interseremus: Omnium à puncto B promanantium, & à circuli EGZ cavis partibus refractionem patentium (juxta casus prænominatos respectivam) refracti per punctum C transibunt.

Nam ejusmodi quilibet incidat radius BG, & (stantibus quæ præstructa præmonstratáque sunt) triangula BGF, GCF similia sunt; angulúsque BGF par angulo GCF; itémque FG. CF :: I. R; est autem FG ad CF, *ut Sinus anguli* GCF *hoc est anguli BGF) ad Sinum anguli CGF. ergò Sinus anguli* BGF *(qui est angulus incidentiæ) ad Sinum anguli* CGF se habet, ut I ad R. ergò CGc est refractus ipsius BG: Q. E. D. Fig. 113, 114.

Nota. Si qui ad convexas hujusce circuli partes incidunt, ità reflectantur, ut perpetuo Sinus anguli incidentiæ ad Sinum anguli reflexi se habeat ut I ad R; etiam reflexi per C transibunt.

Hinc habetur unum (quoad hos casus) è præcipuis in *Dioptrica* desideratum, perquam utile; Superficies simplicissima radios ab uno puncto procedentes ità refringens, ut tanquam ab altero proveniant; id quod demonstrationis adductus commoditate *Corollarii* loco (licèt ad aliam pertinens hypothesin) hîc apponere non dubitavi, redeamus è diverticulo.

X. Notandum porrò, quòd diversos refringentes circulos, iísque competentes, modo præstituto determinatos, refractarios adsumendo, rectæ CB, EZ, CE, CZ, CF easdem in uno, quas in altero quovis proportiones observant; id quod facilimè demonstratur; & satis elucescit

cescit ex eo, quod earum omnium ad se proportiones in eodem ubique modo fundantur in una ratione I ad R. verbis, & Schematis effingendis parco. Pro sequentibus hæc adjungo *Lemmatia.*

XI. 1. Sint tria quanta A, B, C (quorum maximum A) se deinceps æqualiter excedentia; sint etiam altera totidem M, N, O; & sit A. B :: M N; ac B, C :: N, O; dico fore quoque tria M, N, O in ratione continua *Arithmetica.* Nam ob A. B :: M. N. erit divisim A — B. B :: M — N. N. item ob B. C :: N. O. erit per rationis conversionem B. B — C :: N. N — O. ergò erit ex æquo A — B. B — C :: M — N. N — O. itaque cùm sit ex Hypothesi A — B = B — C; erit etiam M — N = N — O: Q. E. D.

XII. 2. In circuli quadrante Z Q trium arcuum Z G, Z H, Z I Sinus recti F α, F β, F γ æqualiter crescant (ut nempe sit $\alpha\beta = \beta\gamma$) dico fore G α — H β ⊐ H β — I γ.

Fig. 115. Nam ducatur subtensa G I ipsam H β secans, in X; & sint X R, I S ad F Q parallelæ; patet ipsas G R, X S æquari hoc est fore G α — X β = X β — I γ; unde liquidum est esse G α — H β ⊐ H β — I γ: Q. E. D.

XIII. 3. Sunto concentrici bini circulorum quadrantes F Z X, F ζ ξ; & ad F Z parallela ducatur recta quævis L G γ; circulos inter-

Fig. 116. secans punctis G, γ; dico fore F Z — L G ⊏ F ζ — L γ.

Nam connexa F G circulum $\zeta\gamma\xi$ producta secet in T; connectantúrque subtensæ Z G, ζ T (hæc ipsam L γ secans in S) Patétque jam rectas Z G, ζ T parallelas esse; adeóque quadrangulum Z G S ζ fore parallelogrammum; unde G S = Z ζ; adeóque F ζ — L S = F Z — L G. ergo F ζ — L γ ⊐ F Z — L G: Q. E. D.

XIV. Sint jam tres radii paralleli M N, Q R, V X, à se distantes æqualiter (hoc est ut ductis N v, R ϱ, X ξ ad axem A C perpendicularibus sit X ξ — R ϱ = R ϱ — N v) & ipsorum refracti cum axe

Fig. 117. conveniant punctis K, L, O; erit obliquiorum concursibus interjectum spatium O L majus spatio L K, quod à rectiorum occursibus continetur.

Nam ducantur N C, R C, X C circulo refractario occurrentes punctis G, H, I; & ad has à refractarii centro F ducantur perpendiculares F α, F β, F γ; & quoniam triangula C X ξ, C F γ similia sunt; erit X ξ. C X :: F γ. C F. item simili de causa, est C R (C X).

R ϱ

$R\varrho :: CF . F\epsilon$; quapropter erit ex æquo $X\xi . R\varrho :: F\gamma . F\epsilon$. non dispare ratione constabit esse $R\rho . N\nu :: F\epsilon . F\alpha$. ergò cùm tres $X\xi$, $R\varrho$, NV se æqualiter excedant; *etiam tres $F\gamma$, $F\epsilon$, $F\alpha$ se æqualiter excedent; unde consequetur esse $C\alpha - C\epsilon \sqsupset C\epsilon - C\gamma$; nec non esse * $\alpha G - \epsilon H \sqsupset \epsilon H - \gamma I$; adeóque conjunctim $CG - CH \sqsupset CH - CI$; hoc est $CK - CL \sqsupset CL - CO$; hoc est denuò $LK \sqsupset OL$: Q.E.D. *21 *hujus Lect.* *Hyp.* *22 *huius Lect*

XV. Hinc apparet rectiùs illapsam refringenti lucem magìs inspissari; versúsque punctum Z in arctius redigi; maximam proinde vim ejus isthic exeri; focúmque combustionis (ad solem) ibi versari.

XVI. Consectatur etiam radios (hujusmodi saltem parallelos) quò rectiores oculo (cujus nempe superficies refractionis munus obeuntes aut Sphæricæ sunt, aut Sphæricas aliquatenus referunt) incidunt, eò faciliùs ab ipso readunari, seu propiùs recolligi.

XVII. Quinimò tandem ex his colligitur visibilis longinqui puncti speciem oculo, in axe posito, circa punctum Z apparere. Etenim ab ei adjacentibus partibus refracti cùm præ cæteris perpendiculares (vi proinde fortiores, & recollectu paratiores) neque non copiosiores affluunt; quibus ex causis imaginis positio dependet; ut jam sæpiùs admonitum: — *ἐχθρὸν δέ μοι ἐστὶν αὖτις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεύειν.* cæterùm hâc defunctus curâ tantisper respirabo. ||

Lect.

LECT. XII.

I. *Parallelorum ad circulum refractionem patientium in contemplatione defixus, præter alia præcipua symptomata, locum ultimè determinavi, quam isti repræsentant, imaginis, oculo in axe constituto.* res jam postulat ut eandem definiamus oculi gratiâ secùs collocati. veruntamen unam priùs haud inutilem adnectam observationem, ad præcedentia spectantem; hanc utique:

Fig. 118, 119. II. Si duo Segmenta N B R, $\nu \beta \rho$ latitudines (vel subtensas) N R, $\nu \rho$ æquales habeant; quorum $\nu \beta \rho$ ad majorem pertineat circulum; hoc cùm potentiùs aduret, tum objectum visibile clariùs atque distinctiùs exhibebit. Sint enim C, κ circulorum refringentium centra; & circuli iis competentes refractarii sint E G Z, $\epsilon \gamma \zeta$; horúmque centra F; φ; tum parallelorum punctis N, ν incidentium sint refracti N D, $\nu \delta$; dico tum fore $DZ \sqsubset \delta\zeta$. || Ducantur enim rectæ N C G, $\nu \kappa \gamma$; hísque perpendiculares rectæ F L, $\varphi \lambda$. éstque $CN . \nu\varpi :: CN . NP :: CF . FL$. & $\nu\varpi . \kappa\nu :: \varphi\lambda . \kappa\varphi$. ergò (rationes sibi pares adjungendo) est $CN . \nu\varpi + \nu\varpi . \kappa\nu :: CF . FL + \varphi\lambda . \kappa\varphi$. hoc est $CN . \kappa\nu :: CF \times \varphi\lambda . FL \times \kappa\varphi$. est autem
23. II Lect. $CN . \kappa\nu :: CF . \kappa\varphi :: CF \times \varphi\lambda . \kappa\varphi \times \varphi\lambda$. quapropter erit $CF \times \varphi\lambda . FL \times \kappa\varphi :: CF \times \varphi\lambda . \kappa\varphi \times \varphi\lambda$; & idcircò $FL \times \kappa\varphi = \kappa\varphi \times \varphi\lambda$; indeque $FL = \varphi\lambda$. hinc consequetur fore $CF - CL \sqsubset \kappa\varphi - \kappa\lambda$; nec non $FZ - LG \sqsubset \varphi\zeta - \lambda\gamma$; proindéque conjunctim $CZ - CG \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\gamma$; hoc est $CZ - CD \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\delta$; hoc est demum $DZ \sqsubset \delta\zeta$; exhinc lux ab arcu $\nu\beta\rho$ magìs constipata, (in spatium quippe restrictius $\delta\zeta$ coacta) violentiùs operabitur; & à fonte magìs ad punctum accedente promanare visa punctum radians distinctiùs exhibebit; id quod institutum fuit ostendere; quo rei passim observatæ, nec exilis in perspiciliorum constructione usûs ratio constaret. || In ordinem jam recidimus; ut puncti nempe longinqui locum apparentem indagemus, oculi respectu quomodocunque siti quem in finem conficiendum venit imprimìs hujusmodi *Problema*, rectum definiens in qua locus iste versatur:

III. Dato

III. Dato circulo refringente ; punctóque quovis X ; per punctum X ducatur recta, quæ ſit incidentis ad datam poſitione rectam C B parallelè refractus.

Si punctum datum X ponatur in axe C B ; facillimè perficitur negotium ; etenim ſi fiat R . I : : C X . T ; & centro X intervallo ipſam T adæquante deſcribatur circulus refringentem interſecans in N ; è præmiſſis admodum patet connexum N K per N incidentis ad B C paralleli refractum eſſe ; quia ſcilicet eſt C X . X N : : C X . T : : R . I. Fig. 120.

IV. Verùm extra caſum hunc, & alios particulares nil huc attinentes, generatim conceptum *Problema* Solidum eſt, aut pluſquam Solidum (ut ex analyſi non difficilè perſpiciatur) & certè viâ conſuetâ, per lineas vulgò receptas, conſtructu perquam arduum & operoſum ; ità quidem ut licèt mihi non penitus incomperta ſit methodus ejuſmodi conſtructionem non unam moliendi, ægrè poſſim adduci, tantum ut ei temporis, tantum laboris impendam, quantum expoſcit ; ſuffecerit itaque modum indigitare, quo per lineam quandam ſibi peculiarem, punctatim facili negotio deſignabilem, ità conſtrui poſſit, ut unà ſuam naturam ac indolem prodat. modus ille ſic habet.

V. Connectatur recta C X ; fiátque C X . C V : : R . I ; & per punctum V indefinitè protendatur recta F G, datæ C B parallela ; tum è refringentis centro C rectæ quotcunque C I exeant, rectam F G decuſſantes punctis H ; & centro X, intervallo rectas V H perpetuùm æquantè deſcripti circuli rectis C I occurrant punctis N ; per hujuſmodi puncta quævis linea tranſit, quam innuimus expoſiti *Problematis* Solutioni deſervituram ; ejus ſcilicet, & dati circuli refringentis interſectio quæpiam incidentiæ punctum erit, ad quod per X ducta recta refringetur in aliquam ipſi B C parallelam ; ſeu viciſſim hæc in illam. Sit enim talis interſectio quævis N ; & ducta N X ipſam B C ſecet in K ; & ſint N M, ac X T ad B C parallelæ. Eſtque tum C K . K N : : (T X . X N : : T X . V H : : C X . C V : :) R . I ; unde ſecundum oſtenſa liquet N X K refractum eſſe ipſius M N ; quod oportebat factum. Ità *Problema* δυσπόριστον utcunque licebit exequi, nec non ejuſce qualitatem intueri ; quot refracti per oculi centrum meent definire, ſingulóſque reipsâ deſignare ; quæ longiuſculum eſſet ſigillatim exponere. cùm autem eâtenus imaginis locus Fig. 121.

habeatur determinatus; succedit ut breviter etiam ipsissimum in singulo tali refracto punctum ostendamus, ad quod illa consistit. in cujus rei gratiam hoc quasi *Lemma* præsternemus.

VI. In circulo A N B, cujus centrum C, sint Semidiametro C A perpendiculares N E, R F; item Semidiametro C B sint perpendiculares N G, X H; sint autem C E, E F ipsis C G, G H proportionales; & arcus N R, N X indefinitè parvi; seu quasi minimi dictâ conditione præditi; dicimus arcum N R ad arcum N X rationem habere conflatam è rationibus ipsarum C E ad C G, & N G ad N E; vel esse arc. N R, N X :: C E × N G . C G × N E. Nam per N ducatur V T tangens circulum, ipsisque F R, H X occurrens punctis T, V. est itaque (propter Summam ex Hypothesi parvitatem dictorum arcuum) arc N R . C N :: N T . C N :: E F . E N. item C N . arc N X :: C N . N V :: N G . G H. quapropter erit arc N R . C N + C N . arc N X = (E F . E N + N G . G H = E F . G H + N G E N =) C E . C G + N G . E N. hoc est arc N R . arc N X = C E . C G + N G . E N: Q. E. D. (vel arc N R . N X = C E × N G . C G × E N.)

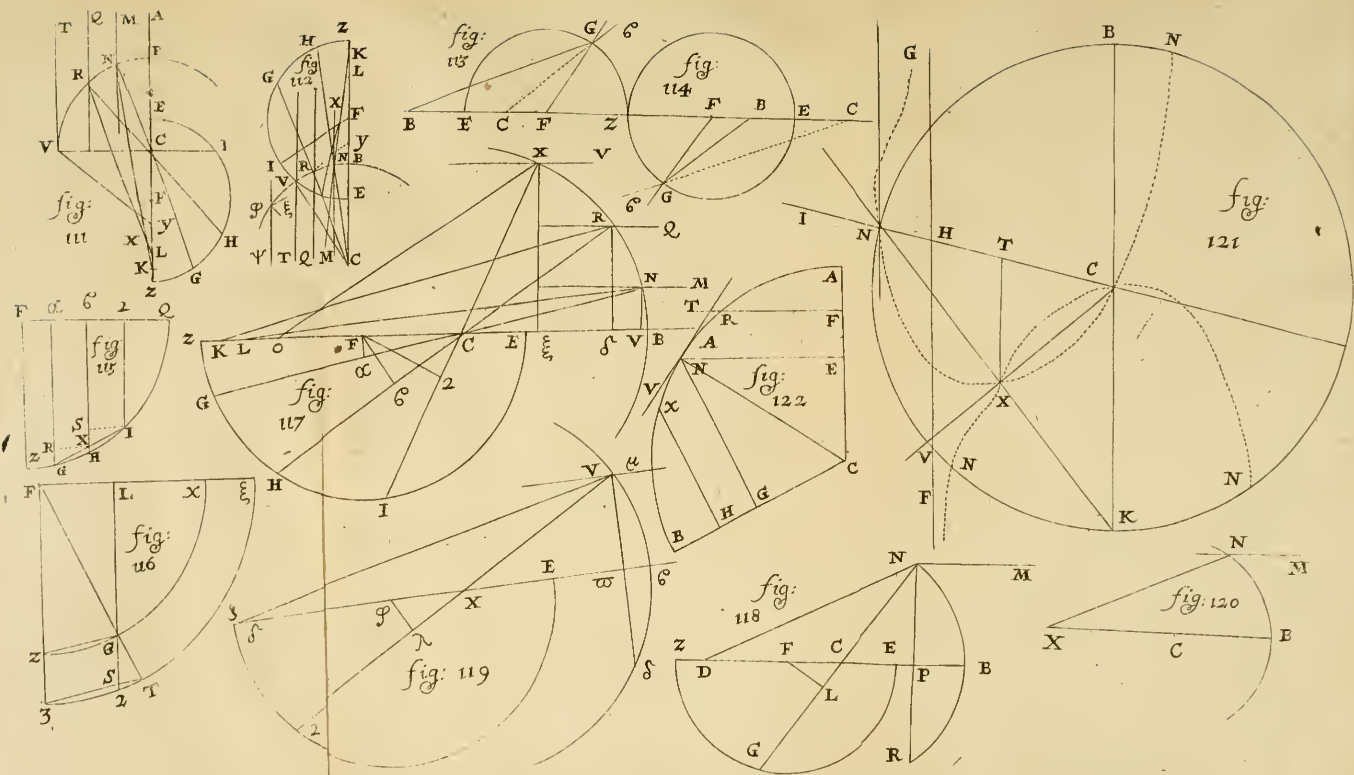
Fig. 122.

VII. Sit jam radii cujusvis talis M N P, refringentem intersecantis punctis N, P, refractus N ϖ (refringentem nempe denuò secans in ϖ) huic autem indefinitè vicinus (& quasi proximus) adjaceat radius Q R S, cujus itidem refractus R σ (refringenti nempe rursus occurrens in σ), priorem N ϖ decussans in Z; bisecentur autem subtensæ N P, N ϖ punctis G, E: Dico rationem N Z ad G Z componi è rationibus N G ad N E, & C E ad C G.

Fig. 123, 124.

Nam ducantur rectæ C E (hæc ipsam R S quoque secans in F) & C G; nec non C I ad R σ perpendicularis; & in protracta C G sumatur C H = C I; & per H ducatur X Y ad N ϖ parallela, seu perpendicularis ad C H; unde est X Y = R σ; & arc N X = Y ϖ; & arc X Y = arc R σ; adeóque arc N R ±: σ ϖ = 2 arc N X. Estque præterea C G . C E :: R . I :: C I . C F :: C H . C F; adeóque permutatim C G . C H :: C E . C F. ergò (juxta præcedentem) est arc . N R . N X = N G . N E + C E . C G. ad hæc ob illam (quæ ponitur) arcuum N R, S P, ϖ σ exiquitatem, erit arc N R . ϖ σ :: subtensa N R . ϖ σ :: N Z . Z σ :: N Z . Z ϖ. ergò (inversè componendo, vel dividendo, tum & consequentes subduplando) arc N R . $\frac{\text{arc } NR \pm: \varpi\sigma}{2}$ :: N Z . $\frac{NZ \pm: Z\varpi}{2}$. atqui velut modò dictum)

arc


fig: 111
fig 112
fig: 113
fig: 114
fig 115
fig: 116
fig: 117
fig: 118
fig: 119
fig: 120
fig: 121
fig: 122

arc $\frac{NR \pm : \varpi\sigma}{2} = NX$; item eſt $\frac{NZ \pm : Z\varpi}{2} = GZ$. erit ergò arc NR . NX :: NZ . GZ . quapropter erit (juxta præcedentem) NZ . GZ = NG . NE + CE . CG. Fig. 124.

VIII. Porrò liquet punctum Z eſſe locum imaginis, quem expetimus, oculo conſpicuæ in recta N ϖ conſtituto; utpote circa quod viciniorum ipſi NP radiorum refracti ipſam N ϖ interſecant; qua de re multoties egimus, ut pigeat eò plura βαττολογεῖν.

IX. Facilè verò, Secundum *Theorema præmiſſum*, deſignatur punctum Z. Ducatur nempe CG ad refractum NK perpendicularis; & ad connexam CN ducatur perpendicularis GV; & per V ducatur VZ ad CK parallela, ſecans ipſam NK in Z. factum erit. Nam, connexâ GE, liquet angulos GEC, GNC (circumducti nempe per N, E, G, C circuli ſubtenſæ GE inſiſtentes ambos) æquari; hoc eſt angulos GEC, VGC æquari. quapropter (utrique rectum adjiciendo) toti NEG, ZGV æquantur. item alterni GNE, VZG æquantur. ergò triangula GNE, VZG ſimilia ſunt, unde NG . NE :: ZV . ZG. itaque . CE . CG + NG . NE = CE . CG + ZV . ZG. verùm (ob refractionem) eſt NK . KC :: I . R :: CE . CG; hoc eſt NZ . ZV :: CE . CG. eſt igitur CE . CG + NG . NE = NZ . ZV + ZV . ZG; hoc eſt CE . CG + NG . NE = NZ . ZG. ergò punctum Z conditionem obtinet, imaginis loco congruentem, è mox oſtenſis. adeò liquet propoſitum. Fig. 125.

X. Quin ſubnotamus rectam NK ad punctum Z ità dividi, ut ſit NZ . ZK :: NGq . CGq. Etenim eſt NZ . ZK :: NV . VC :: NVq . VGq :: NGq . CGq.

XI. Subjiciam & hoc è dictis conſectarium *Theorema:*

Fiat $\surd$ 3Rq . $\surd$ Iq — Rq :: CB . CQ; ductáque QN ad CB perpendicularis circumferentiæ occurrat ad N; radii verò MN ad CB paralleli refractus ſit NK, circuli peripheriæ denuò occurrens in Z; dico punctum Z eſſe imaginem, qualem mox definivimus, oculo conſpicuam in ipſa NK ſito. Fig. 126.

Nam (ductis CE ad MN, & CG ad NZ perpendicularibus, ac junctâ CN) ob 3Rq . Iq — Rq :: CNq . NEq. hoc eſt 3CGq . CEq — CGq :: CNq . NEq; erit dividendo 4CGq —

$- CEq . CEq - CGq :: CNq - NEq . NEq :: CEq . NEq .$ quare permutando $4 CGq - CEq . CEq :: CEq - CGq . NEq .$ (hoc eſt) $:: NGq - NEq . NEq$. ergò componendo $4 CGq . CEq :: NGq . NEq$. & ideò $2 CG . CE :: NG . NE$. quare $2 . 1 + CG . CE = NG . NE$. vel $2 . 1 = NG . NE + CE . CG$. hoc eſt $NZ . GZ = NG . NE + CE . CG$. unde liquet, è mox antedictis, propoſitum.

XII. Ex iſta porrò conſtructione facilè colligitur, ſi fuerit $3 Rq = Iq - Rq$ (hoc eſt ſi $2 R = I$) adeóque $CQ = CB$; quòd hujuſmodi punctum Z non aliud erit ab ipſo D; ſeu perpendiculari ipſi A B debitam imaginem ad punctum D conſiſtere; eas verò quæ reliquis refractis conveniunt ejuſmodi imagines intra circulum omnes, vel ſupra peripheriam extare. quinetiam ſi fuerit $2 R \sqsupset I$, adeoque $CB \sqsupset CQ$, patet nullius refracti imaginem in peripheria exiſtere, ſed omnes ſupra ipſam. Enim verò in his caſibus omnes refracti axem A D ſupra punctum D interſecant. verùm ſi fuerit $2 R \sqsubset I$ (utique ſicut reverà quoad pleraſque cunctas in hac rerum natura pellucidas refringentes materias uſu venit) utì reipsâ datur ejuſmodi punctum Z, in perepheria T D alicubi ſitum, ità facilè poterit iſto modo determinari.

XIII. Obſervetur porrò ſic definitum punctum Z circuli partem à D verſus T per radios quadranti B T incidentes illuſtratam terminare. Omnes enim ipſo M N obliquiùs incidentium refracti ipſam N Z ſupra Z verſus G decuſſabunt; adeóque ad partes Z D circulo impingent; item omnium ipſo M N rectiorum refracti ipſam N Z infra Z verſus K interſecabunt; & hinc etiam in arcum Z D cadent.

Fig. 127. XIV. Exhinc apparet (id quod *ab eximio D. Sluſio* monitum amicus mihi communicavit) potuiſſe *Carteſium* ſine tabularum confectione ſuum *Iridis* angulum determinare. nam aſſumpto arcu $DY = DZ$; angulum iſtum arcus Z Y metitur; poſito circulum propoſitum per aquei globi centrum tranſire. quod ità facilè conſtat. Radii cujuſvis diametro B C paralleli M N refractus N Z K reflectatur in Z F H; & Z F in F O refringatur; ſitque F L ad B D parallela; ſumatur etiam $DY = DZ$; & connectantur C Z, C Y; dico angulum L F O æquari angulo Z C Y. Nam imprimìs ob Z N, Z F æqualiter ad peripheriam inclinatos, patet angulum O F H angulo P N Z vel C K Z æquari. igitur ang. $HFL - HFO =$ ang $FIC - CKZ =$ ang KIZ

KIZ — CKZ = ang NZI — 2 ang CKZ = 2 ang NZC — 2 ang CKZ = 2 ang. ZCD = ZCY. eſt igitur ang. OFL = ang ZCY. Cùm itaque ſit in ſuperiore Hypotheſi punctum Z umbræ lucíſque confinium, manifeſtè liquet propoſitum.

XV. Subnotetur autem, ſi medium inflectens ſit aqueum, arcum ZY eſſe partem circuli totam (poſticam ſcilicet) illuminatam; tangentis enim ST refractus, puta TV, nedum non punctum Y prætergreditur, at citra punctum D cadit. aſt in denſioribus mediis, velut in vitro, ſecùs accidere poteſt; ſiquidem in eo tangentis refractus, puta TX, ultra terminum Y (modo prædicto deſignatum) cadit, ut quidem ex calculo facilè colligatur; unde pars illuminata arcu ZY amplior evadit; tangentium quippe refractis circumſcripta. Viderit igitur excellentiſſimus vir; an univerſim conſtet (id quod ipſe niſi fallor innuere videbatur) ex obſervata partis illuminatæ quantitate, *Iridis angulum, etiam juxta Carteſianas Hypotheſes, recte determinari*. Nam ſumendo arcum DR = DX; ad punctum quidem R pertinget illuſtratio; neque tamen ulla lux quadranti BT incidens à parte ZR (ſed illa tantùm quæ ad partes ZD cadit) ad oculum O inflectetur. unde quoad oculos ad has partes ſitos, hoc eſt quoad rem quæ præ manibus, punctum Z lucem & umbram dirimit atque diſterminat. Fig. 128.

XVI. Vobis autem expendendum propono, annon exhinc *apparentiarum in Iride ratio* elici poſſit, illâ fortè veriſimilior, quam ipſe *Carteſius* aſſignavit. quid enim ſi dixero peripheriæ ZV impingentem lucem, & verſus O inflexam magìs apparere; primò, quia ſpiſſior eſt, ac à radiorum geminâ diffuſione conſtat, ab utraque puncti N parte in arcum ZV refractorum; tum ſecundò, quoniam obliquiùs ipſi ZV incidit, adeóque faciliùs & copioſiùs indè quàm aliunde verſus partes O retorquetur? Et cum præſertim circa punctum Z acutiùs radii coëant, neque non incurrant obliquiùs; quidni propterea vividior exindè reſultet apparentia? Verùm hæc παρεκβατικῶς. Fig. 128.

Quoniam Colorum incidit mentio, quid ſi de illis (etſi præter morem ac ordinem) paucula divinavero?

XVII. *Album* eſt quod lucem copioſam, pariter ubique ſpiſſam, circumfundit. Talia fermè ſunt corpora, rarioribus poris interpuncta; præſertim, quæ multas ſuperficieculas, in omne latus obverſas, habent. Suadetur hoc, Quia purè lucida ſemper alba videntur;

Quia

Quià corpus bene tersum luci Splendidæ expositum albescit; Quoniam alba difficiliùs ignem concipiunt; Quòd humore tenuiore vacuata corpora (*Capilli, Folia, Cineres*) *canitiem* acquirunt; Quibus & frigore constricta accenseri possent.

Nigrum est, quod lucem minimè, vel parcissimè refundit. talia plerunque sunt corpora valdè pellucida; nec non quæ crebros meatus, & cavernulas lucem absorbentes habent. Hoc indicat, Quod omnes *Umbræ nigræ apparent*; Quod *Aqua, Vitrum, Nubes* ad hunc colorem vergunt; Quod *nigra* faciliùs ignem imbibunt, calefiunt, comburuntur; Quòd longiùs dissita (quorum sensim intercipitur, & amittitur lux) obscuriora videntur.

è Lat. Fig. 128. *Rubrum est*, quod lucem effundit hinc indè confertam, ac solito magìs constipatam, ast interstitiis umbrosis diremptam, & interruptam. talia concipi possunt corpora, multas intra se quasi *fornaculas* & *focos* habentia (qualia X, è *Speculis cavis* contextum; & Y è *Sphærulis*, transmissam lucem ad totidem *focos* cogentibus, constans). Argumento sit, Quòd à *Speculis*, & *vitris ustoriis* collecta lux rubescit; Quòd corpora densa ignita (quippe quorum cellæ luce spissâ referciuntur) rubra videntur; Quòd roscida nubes Soli (matutino, vel vespertino) exposita rubet; Quòd erosio rubiginem parit. || Ad rubri naturam fortasse pertinet, quòd compressa lux languidiùs emicat.

Cæruleum est quod lucem raram, aut impetu segniore concitatam emittit. talia Videntur esse corpora, quæ particulis constant albis ac atris alternatim dispositis; sed & hunc subinde colorem ostentant candida maligniùs illustrata. Exemplo sint, *Æther Sudus* (in quo nempe pauciora natant corpuscula lucem ad oculos reverberantia, cæterâ luce dilabente) *Mare*, sale candido nimirum & humore pellucido constans; Umbra corporis cujusvis opaci, de die, ad lucernam ardentem facta, & ad chartam albam excepta seu terminata; (nempe corporis AB ad chartam XY violacea depingitur umbra, à lucerna C).

è Lat. Fig. 128. *Viride* cæruleo perquàm agnatum est. *Discrimen* explorent sagaciores; ego non ausim ariolari.

Cæterùm reliqua colorata ex istis variè commixtis, atque contemperatis emergunt; ut *flavum* ex albo copioso, rubríque nonnihillo intersperso; *purpureum* ex multo cæruleo, rubríque tantillo, &c. Verùm sufficiat hâctenus, ista supra captum nostrum posita Scrutantes; nos illis, qui αἰτιολογίας *Physicas* morosiùs excipiunt, deridendos propinasse.

Sufficient hæc pro radiis parallelis; ad divergentes ordine procedendum est; ast interpositâ morâ, nè vix exorsi cogamur abrumpere. ||

Lect.

LECT. XIII.

I. *TRansactis iis quæ refractioni conveniunt isti, quam ad circuli peripheriam subeunt radii sibimet paralleli; quid iis obvenit proximè dispiciendum venit, qui à puncto quopiam sensibiliter divergentes itidem circulo se objiciunt refringendos.* cum autem in hac Hypothesi multa reperiatur casuum varietus è pluribus causis oriunda (nedum enim à mediorum specie differentium ordine, vel situ versus se diverso; quinetiam circuli refringentis alia ac alia, convexa nempe vel concava, facie radiationi obversa; sed ab ipsius quoque radiantis magìs aut minùs à refringente semoti positione conclusionum emergit nonnulla discrepantia) nobis incumbet ità rem, quâ possumus, moderari, simul ut cùm ex abstractione nimia proveniens confusio, tum è repetitione fastidium aliquousque devitentur. id autem non aliàs, opinor, commodiùs assequemur quàm imprimìs generalia quædam attingendo, cuidam uni casui (illi nempe, ubi I ⊏ R, & radii convexis circuli partibus incidunt). Sic applicata, ut satìs facilè possint ad alios quoque transferri; tum peculiaria nonnulla singulis congruentia subnotando. ad rem.

II. In circulum refringentem BN (cujus centrum C) radiet punctum A; & connexa AC protendatur ad utrasque partes indefinitè; tum cujusvis incidentis AN sit refractus NK, cum axe nimirum in K conveniens; dico compositas rationes AC ad CK, & NK ad NA æquari rationi I ad R. Conjungatur enim CN, & ducatur KH ad CN parallela; erit igitur (ut generatim antehac habetur ostensum) I. R :: NK. NH = NK. NA + NA. NH = NK. NA + AC. CK: Q.E.D. Fig. 129. 3 Lect. num. 9.

III. Hinc si fuerit CA. CR :: I. R. erit CK. CR :: NK. NA.

Nam

Nam erit tum $CA . CR = CA . CK + NK . NA$. unde, communem utrinque adjiciendo rationem CK ad CA, erit $CK . CA + CA . CR = CA . CK + CK . CA + NK . NA$. hoc est $CK . CR :: NK . NA$.

Fig. 130, 131. Notetur in figuris sequentibus esse perpetuo $CA . CR :: I . R$. quod semel, brevitatis causâ, monitum esto.

Fig. 129. IV. Hinc consectatur; primò; Si fuerit $AN \sqsubset CR$, quòd refractus $N\alpha$ cum axe AC prorsùm excurrens conveniet. Nam erit $CK . AN \sqsupset CK . CR :: NK . AN$. adeóque $CK \sqsupset NK$.

Fig. 130. V. Secundò; si fuerit $AN = CR$, refractus $N\alpha$ ad AC parallelus erit.

Nam sit NH ad AC parallela. quum itaque sit $CA . AN ::$ ($CA . CR ::$) $I . R$; erit AN ipsius HN refractus. ergò vicissim NH ipsius AN.

Fig. 131. VI. Tertiò; Si fuerit $AN \sqsupset CR$, refractus $N\alpha$ cum AC retrò conveniet extractus.

Erit enim tunc $CK . AN \sqsubset CK . CR :: NK . AN$. ac indè $CK \sqsubset NK$.

VII. Hinc clarum est; Si fuerit AB non minor quàm CR, omnes refractos versus AC procurrentes convergere. erit enim tunc semper $AN \sqsubset CR$.

VIII. Subnotetur autem si fuerit saltem $AB = CR$; axi propiores radios in sensibilem parallelismum refringi.

IX. Item, Si AT circulum tangat, & fuerit $AT \sqsupset CR$; manifestum est omnes refractos retrò protractos cum AC concurrere. tunc enim semper est $AN \sqsupset CR$.

X. Clarum est quoque, si $AN = CR$, omnes arcui BN incidentium refractos retrò productos, omnes autem arcui NT incidentium refractos antrorsum procurrentes axi occurrere.

XI. Quum autem in casu, propositi maximè contrario (quum nempe $I \sqsupset R$; & radii concavis incidunt partibus) adsimilis contingat diversitas, hanc quoque breviter attingemus.

1. Si

1. Si fuerit AN $\sqsubset$ CR, refractus Nα cum AC retrò tractus conveniet. Fig. 132.

Nam CK $\sqsupset$ NK. (ut in priore casu).

2. Etiam hîc si AN = CR, refractus Nα fit ipsi AC parallelus.

Nam erit CK = NK. quod in hoc casu nisi K infinitè distet contingere nequit.

3. Si AN $\sqsupset$ CR; refractus Nα prorsùm excurrens axi occurrit.

Nam hîc CK $\sqsubset$ NK.

4. Si AB $\sqsupset$ CR; omnes refracti directè progredientes ad AC convergunt. Erit enim quivis incidens AN $\sqsupset$ CR. Fig. 133.

5. Quum AN = CR, evidens est omnes arcui BN incidentes retrorsum versus CA refractos convergere; omnes autem ad partes NT cadentes antrorsum versus CB refringi.

XII. Hinc apparet sub istis duobus generalibus casibus tres à diverso puncti radiantis intervallo subnascentes speciales casus comprehendi; nempe vel omnes ab axe post refractionem progredientes divergunt, vel omnes ad ipsum convergunt, vel aliqui divergunt, alii convergunt, his intercedente medio quodam ad illum parallelo. quæ subnotâsse discrimina videbatur operæ pretium ac determinâsse. Subdimus etiam quoad reliquos generales casus simpliciùs sese rem habere; scilicet eodem semper modo: Omnes enim ad cavum densius incidentium refracti directè procedentes ab axe divergunt; Ut & omnes eorum, qui convexo ratiori impungunt; id quod è generalissimis refractionum legibus immediatè sequitur, & è simplice secundum illas linearum ductu dilucescit. His admonitis in orbitam regressi pergimus. Fig. 134, 135, 136.

XIII. E præmisso Theoremate non dificilè conficitur hoc *Problema*: Dato in axe puncto K, refractum designare, qui per hoc ipsum transeat. ||

Hoc nempe pacto. Reperiatur punctum G, ut sit KG. AG :: CK. CR. item fiat GF. FA :: CK. CR (:: KG. AG). tum centro F, intervallo FG describatur circulus refringentem intersecans ad N; erit connexa NK incidentis AN refractus. *Lect.* 10. *Num.* 25. Fig. 137.

Nam ducatur FN; & ob KG. AG :: GF. FA. erit permutatim KG. GF :: AG. FA. dividendóque KF. GF :: GF. FA. hoc est KF. FN :: FN. FA. quare triangula KFN, NFA

assimilantur. unde N K . K F : : A N . N F . seu permutando N K.
Fig. 137. A N : : K F . N F . erat autem priùs K F . N F : : G F . F A : : C K . C R . est igitur N K . A N : : C K . C R . unde (juxta dictum Theorema) constat factum.

XIV. Ad constructionem istam advertentes animum, hujusmodi facilè *Consectaria* deducetis:

1. Si circulus G N H *refringentem* contingat ad H; ipsius A H (perpendicularis utique) refractus in K terminabitur; & aliorum incidentium refracti ad unas ipsius K partes (ultra nempe vel citra K respectu centri, pro diversitate casuum ab ipsius A positione resultantium) cadent.

2. Si dictus ille circulus *refringenti* non occurrat omninò, *Problema* constructionem respuet; nec ullus refractus punctum K permeabit.

3. Si circulus G N H *refringenti* coïncidat (id quod facilè concipi potest, & in aliquo reverà casu contingit) omnes refracti in punctum K confluent. || Hæc & alia constructionem istam consectantur solerter expansem; quorum saltem nonnulla haud abs re fuerit exertiùs ostendi; velut hoc imprimìs palmarium.

XV. Si fuerit A B . C R : : B Z . C Z; dico punctum Z esse limitem, ultra vel citra quem nullus refractus axim intersecat; seu perpendicularis ipsius A B refractum in Z terminari.

Nam cujusvis incidentis A N refractus axi occurrat in K, erit ideò C K . C R : : N K . N A . ergò quum sit C R . C Z : : A B . B Z; erit C K . C R + C R . C Z = N K . N A + A B . B Z.

Fig. 138. 1. Est autem (in prima figura, ubi puncta Z, & K sunt ad partes centri, vel ubi refracti ad axem directè procurrentes convergunt) B K $\sqsubset$ N K, & A B $\sqsupset$ A N; adeóque B K . A B $\sqsubset$ N K . N A . ergò C K . C R + C R . C Z $\sqsupset$ B K . A B + A B . B Z . hoc est C K . C Z $\sqsupset$ B K . B Z . vel inversè permutando B K . C K $\sqsubset$ B Z . C Z . dividendóque B C . C K $\sqsubset$ B C . C Z . ergò C K $\sqsupset$ C Z; adeóque punctum K supra Z existit, versus centrum; quod erat propositum ostendere.

Fig. 139. 2. In secundâ verò figura (ubi puncta Z, K ad alteras supra punctum A partes à centro aversas cadunt) connectatur subtensa B N, & ducatur A S ad K N parallela; hæc secabit angulum B A N, majorem ipso B K N, vel B A S; & cùm angulus A B N sit obtusus, èrit A N $\sqsubset$ A S . adeóque K N . A N $\sqsupset$ K N . A S : : K B . A B . erit etiam hîc igitur (ut supra) C K . C Z $\sqsupset$ B K . B Z . vel permutatim C K . B K

$\sqsupset$

$\sqsupset$ CZ.BZ. dividendóque CB.BK $\sqsupset$ CB.BZ. adeóque BK $\sqsubset$ BZ; hoc eſt punctum K magìs quàm Z à centro elongatur.

3. Haud diſſimilis in aliis caſibus erìt *Demonſtratio*; ut in hoc, ubi I $\sqsupset$ R, ad convexas; eſt enim hîc (ut in præcedente) KB.AB $\sqsupset$ KN.AN. adeóque (ſupra monſtratis inſiſtendo) CK.CZ $\sqsubset$ KB.BZ. vel permutando CK.KB $\sqsubset$ CZ.BZ. dividendóque CB.KB $\sqsubset$ CB.BZ. unde KB $\sqsupset$ BZ. adeóque punctum K centro ſemper vicinius eſt quàm Z. Fig. 140.

XVI. Hæc autem cùm, modo ſuo mutatis mutandis, ad omnes caſus transferri poſſint, habentur indè determinati refractorum limites, hoc eſt apparentia radiantium punctorum A loca, reſpectu oculi centrum habentis in axe AC ſitum; juxta doctrinam à nobis toties inculcatam.

XVII. Id autem hîc in duobus caſibus (utroque nimirum ad circuli cavas) peculiare venit obſervandum cùm ſit CB = CR, omnes refractos in ipſo puncto Z (ut ſuprà definito) retrò protractos congregari. Nam ob AB.BC :: AB.CR :: BZ.CZ. erit dividendo AC.BC :: BC.CZ. quapropter ad punctum quodvis N adſumptum connexis AN, ZN, erit ZN.AN :: (CZ.CN ::) CZ.CR. unde ZN refractus erit incidentis AN.

XVIII. Hinc etiam ſi fuerit AB = CR, conſequetur punctum Z à centro infinitè diſtare; quia nempe tum ob AB.CR :: BZ.CZ, erit BZ = CZ; id quod fieri nequit, niſi punctum Z ità elongetur infinitè. Fig. 141.

XIX. *Conſectantur* & hæc: Si punctorum radiantium A, α limites ſint puncta Z, ζ, erit AC.AB + BZ.CZ = αC.αB + Bζ.Cζ. Fig. 142, 143.

Nam è præmiſſis facilè conſtat eſſe

$$\left.\begin{array}{l}\text{tam } AC.AB + BZ.CZ = \\ \text{quam } \alpha C.\alpha B + B\zeta.C\zeta = \end{array}\right\} I.R.$$

XX. Unde Cζ $\sqsubset$ CZ. Nam ob BC.AB $\sqsupset$ BC.αB. componendóque AC.AB $\sqsupset$ αC.αB. erit BZ.CZ $\sqsubset$ Bζ.Cζ. dividendóque BC.CZ $\sqsubset$ BC.Cζ. adeóque Cζ $\sqsubset$ CZ.

Fig. 144. XXI. Imò universim si radii quivis AF, $\alpha\varphi$ ad circulum refringentem æqualiter inclinentur, hísque conveniant refracti FL, $\varphi\lambda$, erit $C\lambda \sqsubset CL$. id quod hoc modo non inelegantèr ostenditur. Ducatur recta BX cum BC angulum efficiens parem angulo refracto ad positam inclinationem pertinenti; perque puncta F, φ; & centrum C transeuntes rectæ ipsi BX occurant punctis P, ϖ. tum quoniam triangula FCL, BCP æquiangula sunt (angulus enim CBP angulo CFL ex constructione par est, & ang. BCP verticali suo FCL æquatur) nec non latus CB lateri CF æquatur, erit CP = CL. Simili planè discursu est $C\varpi = C\lambda$. Porrò, quia $C\varphi$ ad $C\alpha$ (hoc est Sinus anguli $C\alpha\varphi$ ad Sinum anguli $C\varphi\alpha$) majorem rationem habet, quàm CF ad CA (hoc est quàm Sinus anguli CAF ad Sinum anguli AFC, vel æqualis anguli $C\varphi\alpha$) liquet angulum $C\alpha\varphi$ majorem esse angulo CAF, adeóque reliquum $\alpha C\varphi$ minorem esse reliquo ACF; vel angulum PCB angulo ϖCB. unde liquet esse $C\varpi$ majorem quàm CP; hoc est $C\lambda$ majorem esse quàm CL: Quod E.D.

Coroll. Vides arcum BF majorem esse arcu $B\varphi$.

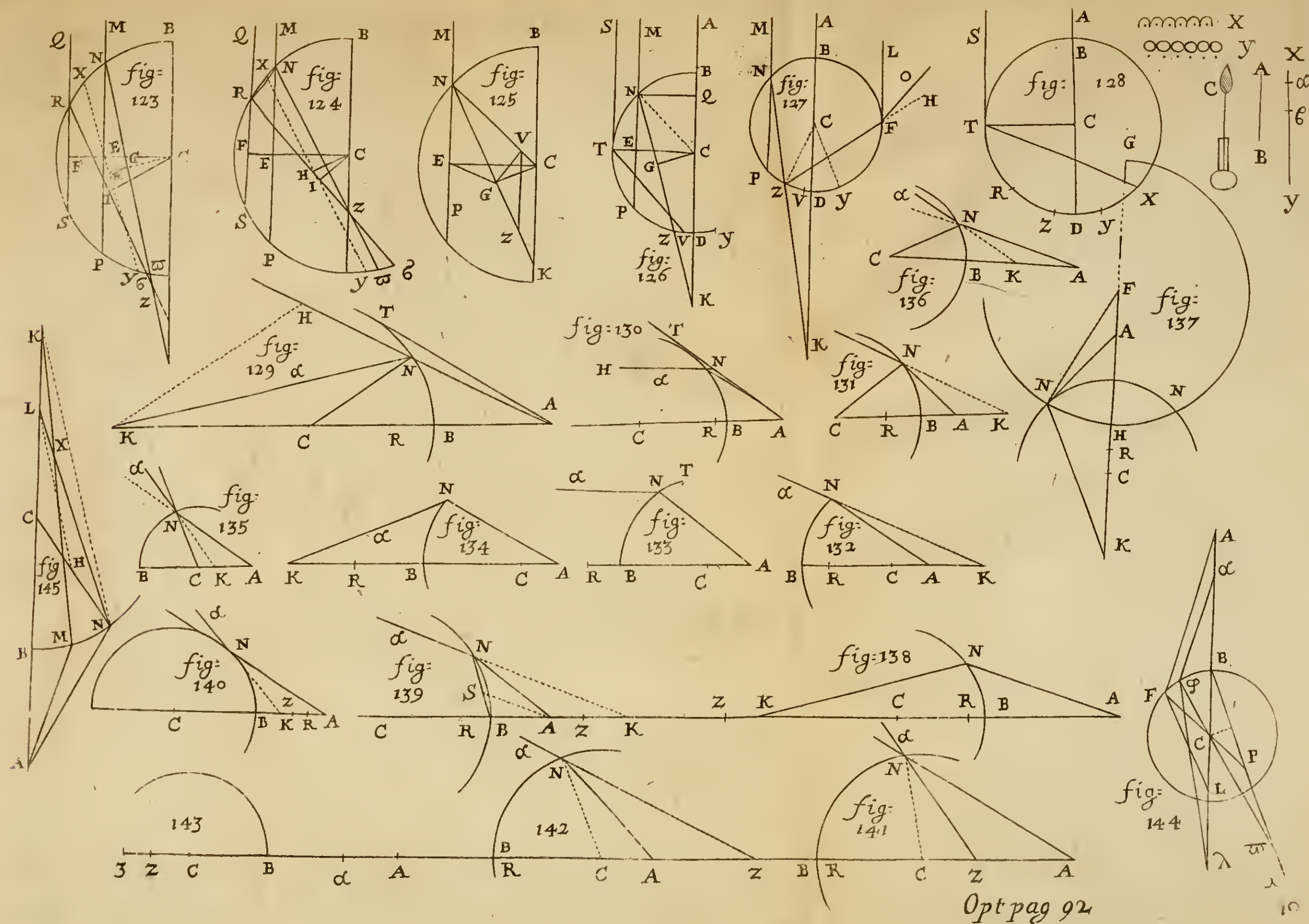
Notes etiam omnes ejusdem inclinationis refractos ope ductæ rectæ BX promptissimè designari. sed hæc an πρὸ ἔργου fuerint nescio.

Fig. 145. XXII. *Subjiciam & hoc Theorema:* Convexo densiori incidentium radiorum AM, AN (quorum AN sit obliquior) refracti MK, NL axem ad easdem partes, directè pergentes, secent, iste ad K, hic ad L; dico fore CK majorem quàm CL.

Nam connexis CN, KN; & ductâ LH ad KN parallelâ; quoniam, è præmissis, est CK . CR :: MK . MA. & CR . CL :: NA . NL. erit CK . CR + CR . CL = MK . MA + NA . NL. est autem NK . NA $\sqsupset$ MK . MA (quia NK $\sqsupset$ MK, & NA $\sqsubset$ MA) ergo CK . CR + CR . CL $\sqsubset$ NK . NA + NA . NL. hoc est CK . CL $\sqsubset$ NK . NL. hoc est NK . HL. $\sqsubset$ NK . NL. quapropter est LH $\sqsupset$ NL. est autem angulus LCN obtusus; ergo recta LH angulum CLN secat; ac angulus LHC interno LNC major est; hoc est angulus KNC angulo LNC major est. unde liquidò patet fore CK $\sqsubset$ CL.

Coroll. CK . CL = MK . MA + NA . NL.

XXIII. Hinc, ejusmodi omnes refracti seipsos priùs quàm axem intersecant, velut ad X. || Hoc speciminis loco pro casu, qui præ manibus.


fig: 123
fig: 124
fig: 125
fig: 126
fig: 127
fig: 128
fig: 129
fig: 130
fig: 131
fig: 132
fig: 133
fig: 134
fig: 135
fig: 136
fig: 137
fig: 138
fig: 139
fig: 140
fig: 141
142
143
fig: 144
fig 145
Opt pag 92

manibus. propter alios qui similia volet, ipse viderit, & sibi paraverit. ego jam aliò progredior; eò scilicet, ut locum definiam imaginis in dato quovis refracto apparentis; prætervehemur enim illud in his certè casibus *intricatissimum Problema* (cujúsque Solutio nullatenus aut laborem quem exigit, aut temporis jacturam compensabit) quo jubetur per datum punctum transeuntem refractum designare. positione datum igitur refractum accipimus; & in hoc imaginis locum ex hoc uno Theoremate determinamus.

XXIV. Duorum incidentium ANP, ARS sibi quàm proximorum concipiantur refracti N ϖ, R σ sese puncto Z decussantes; bisecentúrque subtensæ NP, N ϖ punctis E, G; (à rectis nempe CE, CG ad illas perpendicularibus) dico rationem NZ ad GZ è rationibus CE ad CG (hoc est I.R), NG ad NE, ac AN ad AE componi. Fig. 146.

Ducantur enim CK ad RS, & CI ad R σ perpendiculares; inque productis CE, CG capiantur CF = CK; & CH = CI, & per F ducatur TV ad NP parallela; & per H etiam XY ad N ϖ parallela. Jam est AP. AN :: arc PS. arc NR (ob sumptam arcuum indefinitam parvitatem). ergò $\frac{AP \pm: AN}{2}$. AN :: $\frac{\text{arc } PS \pm: \text{arc. } NR}{2}$. arc NR. hoc est AE. AN :: arc NT. arc NR. item est NZ. Z ϖ :: arc NR. arc $\varpi\sigma$. ac indè NZ. $\frac{NZ \pm: Z\varpi}{2}$ :: arc NR. $\frac{\text{arc } NR \mp: \varpi\sigma}{2}$. *hoc est NZ. ZG :: arc NR. arc NX. ergò, rationes æquales adjungendo, est AE. AN + NZ. ZG = arc NT. arc NR + arc NR. arc NX = arc NT. arc NX. quoniam autem est CE. CG :: (I. R :: CK. CI ::) CF. CH. vel permutando CE. CF :: CG. CH; erit, *juxta præmonstrata, arc NT. arc NX = NG. NE + CE. CG. quapropter erit AE. AN + NZ. ZG = NG. NE + CE. CG. unde (rationes hinc indè pares subducendo) erit NZ. ZG :: + CE. CG + NG. NE + AN. AE. Quod propositum fuit ostendere. * Lect. 9. Num. 11. * 12 Lect. Num. 6.

XXV. Hinc, si fiat CE. CG :: NE. L; & AN. AE :: L. M; erit NZ. ZG :: NG. M. Nam NG. NE + CE. CG + AN. AE = NG. NE + NE. L. + L. M = NG. M.

unde

unde Problematis constructio, seu puncti Z determinatio habetur.

Fig. 147. XXVI. Subnectam & ab amico communicatam (aliâ methodo repertam ab ipso, concinnéque demonstratam) constructionem: Duc N R incidenti A N perpendicularem, & secantem axin in R. Fac N P . N ϖ : : N R . T. duc N Q refracto N K perpendicularem, & æqualem ipsi T; denique jungatur Q C; hæc producta secabit N K in foco quæsito Z.

XXVII. Hujusmodi verò punctum Z esse locum ipsissimum imaginis puncti A, oculo apparentis in ipsa N ϖ constituto, sæpiùs expositæ rationes manifestant.

* *In Num.* 25. XXVIII. Attendenti porrò constabit, siquidem fuerit *N G ad M ratio æqualitatis, quòd punctum Z infinito à puncto G, vel N intervallo distabit; seu proximi radio N ϖ refracti ipsi N ϖ paralleli erunt; sin ratio N G ad M sit majoris inæqualitatis, quòd punctum Z existet infra G, vel in N G antrorsum protracta; verùm denuò si N G ⊐ M, quod punctum Z supra N, vel in N G retrò tractâ versatur. Hæc suffecerit innuisse. Hinc etiam posticæ circuli partis illuminatæ quantitas utcunque possit determinari. sed ad locum Solidum res spectat, ipsámque proinde missam facio.

Fig. 148. XXIX. Inseremus autem hîc *Phænomeni* cujusdam satìs obvii, quódque nonnullis forsan *(utpote communibus Opticæ decretis apparenter adversum)* mirabile videatur, explicationem. Sit lucidi puncti A (modicè distantis, & vividè radios ejaculantis) ad arcum circularem M B N (ab axe A B bisectum) imago, seu focus Z; & per Z, ad ipsam A Z perpendicularis traducta concipiatur linea X Y. porrò, desumatur aliud punctum remotius E; liquet ejus imaginem citra punctum Z (centrum versus) jacere; ductis itaque rectis E M, E N, harum refracti adhuc altiùs se intersecant, puta ad K; productæque M K, N K lineam X Y secent punctis O, P. quinetiam ulteriùs accipiatur punctum F; ductarúmque rectarum F M, F N refracti sint M L, N L; lineæ X Y occurrentes ad puncta R, S; quibus peractis manifestum est intervallum R S ipso O P majus esse. Hinc facilis habetur ratio, cur punctum lucidum (velut *ardens lucerna*, vel *Imago Solis* ad *Speculum* aut *lentem diaphanam* effecta, (quin & stellæ fixæ) quæ propter exiguitatem suam apparentem punctorum ad instar haberi possunt) quò à distinctæ visionis loco longiùs amovetur, eò (contra quàm in aliis visibi-

visibilibus obvenit) majus apparet. Nam si arcus M N B oculi superficiem repræsentet, *(pupilli amplitudini respondentem)* linea X Y fundum oculi, A locum distinctæ visionis ; ejusmodi lucens ad A positum satìs angustum circa Z spatium illustrabit ; ad E verò constitutum, validè radios vibrans, totum coruscatione suâ spatium O P afficiet ; ad F denique collocatum adhuc majus intervallum R S percellet, indéque grandiorem sui speciem exhibebit. In placidè verò lucem remittentibus aliter se habet, quoniam pauciores, & languidiùs agentes qui extremis O, P vel R, S allabuntur radii nullam sui perceptionem excitant. Fig. 148.

Eò lubentius hanc, adeò perspicuam, hujusmodi *Phænomenων* assignamus rationem, quoniam in eorum reddendis caussis ità titubat magnus ille *Galilæus*, nescio quos, ex refractionibus, relectionibúsve quibusdam commentitiis oriundos, ascititios suggerens cincinnos. ||

XXX. Quin hic tandem *Dioptricam simplicem circularem claudemus*, quam utcunque quàm paucissimis ità complexi sumus, ut præcipua saltem (quæ videbantur) & notatu digniora perstrinxerimus. prius autem *Catoptricam circularem* ; nec non utramque, tam *Dioptricam* quàm *Catoptricam*, planam, quantum instituto nostro visum est congruere, pertractavimus. quibus perfuncto mihi propositum aliquando fuit ad curvas alias, conicas præsertim sectiones, haud dissimili methodo pertentandas cogitationem extendere. Sed enim, cùm in his tricis *Geometricis* etiamnum satìs supérque commoratus sim ; & præter ea quæ circa conicas sectiones à nobis pridem insinuata sunt (quæ & ab aliis luculentè tractata prostant) reliqua non ità magnum usum spondeant ; contentus hasce primarias, in usu maximè positas, & usui præsertim accommodatas superficies, ultra paullò quàm hactenùs attentatum aut peractum scirem, excussisse ; cæteras omninò missas faciam.

XXXI. Porrò, quoad inflectiones istas, quos pluribus successivè planis, aut Sphæricis Superficiebus, utcunque constitutis aut compositis, incidentes subeunt radii ; quæ conveniunt illis Symptomata, possunt ea de præmissis elici ; quorum certè præcipuum est, quod apparentis puncti locum respicit ab inflectionibus ad istas superficies factis resultantem ; in hoc enim indagando, determinandóque potissimùm hæ disquisitiones versantur ; Hunc igitur saltem definitum exhibebimus, idque satìs commodè, ex uno quodam Theoremate, seu regula generali ; cui exempla quædam, communis usûs in gratiam selecta, eorúmque qui in hæc inciderit minuendo labori præsertim comparata, subjungemus. Ista verò, nè jam tædio Sinus, sequenti reservamus.

Lect.

Lect. XIV.

I. *Sub praecedentis calcem, Regulam pollicebamur, exemplis stipatam, ex qua punctorum è variis inflectionibus resultantes, imagines dignoscantur. illam nunc exhibemus quàm simplicimè conceptam.*

Fig. 149, 150. Sit A B E F O radius principalis, puncti radiantis A speciem per oculi centrum O deferens, ex incidente primo A B, & inflexis B E, E F, F O (in directum aut secùs dispositis) constans; tum puncti A respectu oculi in recta B E positi, & ex inflectione ad superficiem B resultans (è præmissis utique designabilis) imago sit Z. item hujus Z (quod jam veluti radians concipiatur) respectu oculi in recta E F constituti, & ab inflectione ad superficiem E emergens imago sit Y; demùm puncti Y (tanquam in superficiem F radiantis) respectu oculi in F O collocati sit imago X. erit hoc punctum X imago cunctis ab his inflectionibus proveniens. neque secùs quotcunque fuerint inflectiones sese res habebit; enimverò semper ex illa tali postrema inflectione resultans imago, eadem erit cum illa, quam omnes exhibent.

Hujus effati veritas è constructione satìs apparet; è qua facilè colligitur proximorum ipsi A B incidentium hinc indè radiorum inflexos tandem circa punctum X ipsum F X intersecare. vel ità rem collegeris: punctum Z est puncti A imago; & punctum Y ipsius Z; denuóque punctum X ipsius Y; itaque punctum X ipsius A imago erit, qualem nempe res hic fert, remota. Strictiore longiusculo discursu posset hoc comprobari, sed quorsum rem satìs claram intricare?

II. Exempla jam, quæ dixi, seu è præmissis deducta consectaria subnectam. Notetur autem imagines, quæ in iis proponuntur designandæ, oculum respicere Centrum habentem in ipso radiationis axe (qualis est recta B D) constitutum. item diversarum superficierum ac radiationum axes sibimet in directum poni. præsumatur etiam in refractionibus ex aëre factis ad vitrum fore I. R :: 5 . 3; ad aquam verò fore I. R :: 4 . 3. (hæ nempe rationes veris probè congruæ depre-

deprehenduntur) ; addo, confusionis evitandæ causâ symbolum I dehinc in his exemplis perpetuò majorem proportionis refractiones dimetientis terminum denotare, quocunque de medio in quodcunque peragatur refractio. porrò, medium primum infringens perpetuò densius intelligatur rariori circundatum. item, in figuris appositis litera C denotat centrum anterioris circuli, K centrum posterioris; & B verticem anterioris, D verticem posterioris; denuò designat Y locum imaginis quæsitam.

Hisce præmonitis, primum de longinquo radiantium, seu parallelos ejicientium radios punctorum imagines, pro lentium varietate, sic determinantur.

I. *Ad lentem plano-convexam.* Fig. 151.

II. *Ad lentem plano-concavam.*

Fiat $I - R . R :: DK . DY$.
In Vitro est $DY = \frac{3}{2} KD$.
In Aqua est $DY = 3 KD$.

III. *Ad lentem convexo-planam.* Fig. 151, 152.

IV. *Ad lentem concavo-planam.*

Fiat $\begin{cases} I - R . I :: BC . BZ; \ \& \\ I . R :: DZ . DY. \end{cases}$
In Vitro $DY = \frac{3}{2} BC - \frac{2}{3} BD$.
In Aqua $DY = 3 BC - \frac{3}{4} BD$.

V. *Ad lentem convexo convexam.* Fig. 152.

VI. *Ad lentem concavo-concavam.*

Fiat $\begin{cases} I - R . I :: BC . BZ; \ \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

Coroll. *Ad integram Sphæram.*
Fiat $2 I - 2 R . I :: CD . CY$.

VII. *Ad lentem convexo-concavam.* Fig. 152, 153.

VIII. *Ad lentem concavo-convexam.*

Fiat $I - R . I :: BC . BZ$; &

O I. Si

Fig. 152, 153. 1. Si punctum Z cadat inter C, & K, fac $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

2. Si punctum Z cadat extra CK, & sit insuper $DZ \sqsubset \frac{I}{R} KZ$; fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis versus K.

3. Si $DZ = \frac{I}{R} KZ$, imago Y infinitè distabit.

4. Si $DZ \sqsupset \frac{I}{R} KZ$; fiat $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY ad partes lentis adversas ipsi K.

De sensibiliter autem propinqua distantia radiantium seu divergentes radios emittentium punctorum (qualia semper designat punctum A) imagines (ut & illæ quas ad ejusmodi puncta convergentes efficiunt radii) hoc pacto determinantur.

Fig. 154, 155. I. *Ad lentem plano-planam diverg.*

II. *Ad lentem plano-planam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ, \ \& \\ I . R :: DZ . DY. \end{cases}$

Breviùs. Fiat $I . I - R :: BD . AY$.

Fig. 156. III. *Ad lentem plano-convexam diverg.*

IV. *Ad lentem plano-concavam converg.*

Fiat $R . I :: AB . BZ$. & cum Z cadit

1. Extra DK, si $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$; fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis adversus A.

2. Si $\frac{I}{R} KZ = DZ$; imago distabit infinitè.

3. Si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$; fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

4. Cùm

4. Cùm Z cadit inter puncta D, K; fac $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY versus A.

V. *Ad lentem plano-concavam diverg.* Fig. 156, 157.

VI. *Ad lentem plano convexam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ; \ \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

VII. *Ad lentem convexo-planam diverg.* Fig. 157.

VIII. *Ad lentem concavo-planam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, puncta Z, & Y ad lentis partes puncto A adversas reperientur, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$. & $I . R :: DZ . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, imago infinitè distabit.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; deprehendentur Z, & Y versus A, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $I . R :: DZ . DY$.

IX. *Ad lentem concavo-planam diverg.* Fig. 158.

X. *Ad lentem convexo-planam converg.*

Si A cadat extra BC, fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C, fac $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; tum fiat $I . R :: DZ . DY$.

Fig. 158, 159. XI. *Ad lentem convexo-convexam diverg.*

XII. *Ad lentem concavo-concavam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R} KZ - DZ :: DK . DY$; puncta Z, Y adversus A cadunt.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape DY adversus A.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; fac $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & sume BZ versus A. Jam cùm Z cadit extra DK, si primò sit $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY adversus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imago distabit infini è.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY versus A.

6. Quum denuò cadit Z inter D, & K, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; sumatúrque DY versus A.

Corol. Ad integram Sphæram diverg.

1. Si $AB + AC \sqsubset \frac{2R}{I} AC$; fiat $AB + AC - \frac{2R}{I} AC . AC :: BC . CY$; & cape CY adversus A.

2. Si $AB + AC = \frac{2R}{I} AC$; imago in infinitum abit.

3. Si $AB + AC \sqsupset \frac{2R}{I} AC$; fiat $\frac{2R}{I} AC - AC - AB . AC :: BC . CY$; capiatúrque CY versus A.

Fig. 159. XIII. *Ad lentem concavo-concavam diverg.*

XIV. *Ad lentem convexo-convexam converg.*

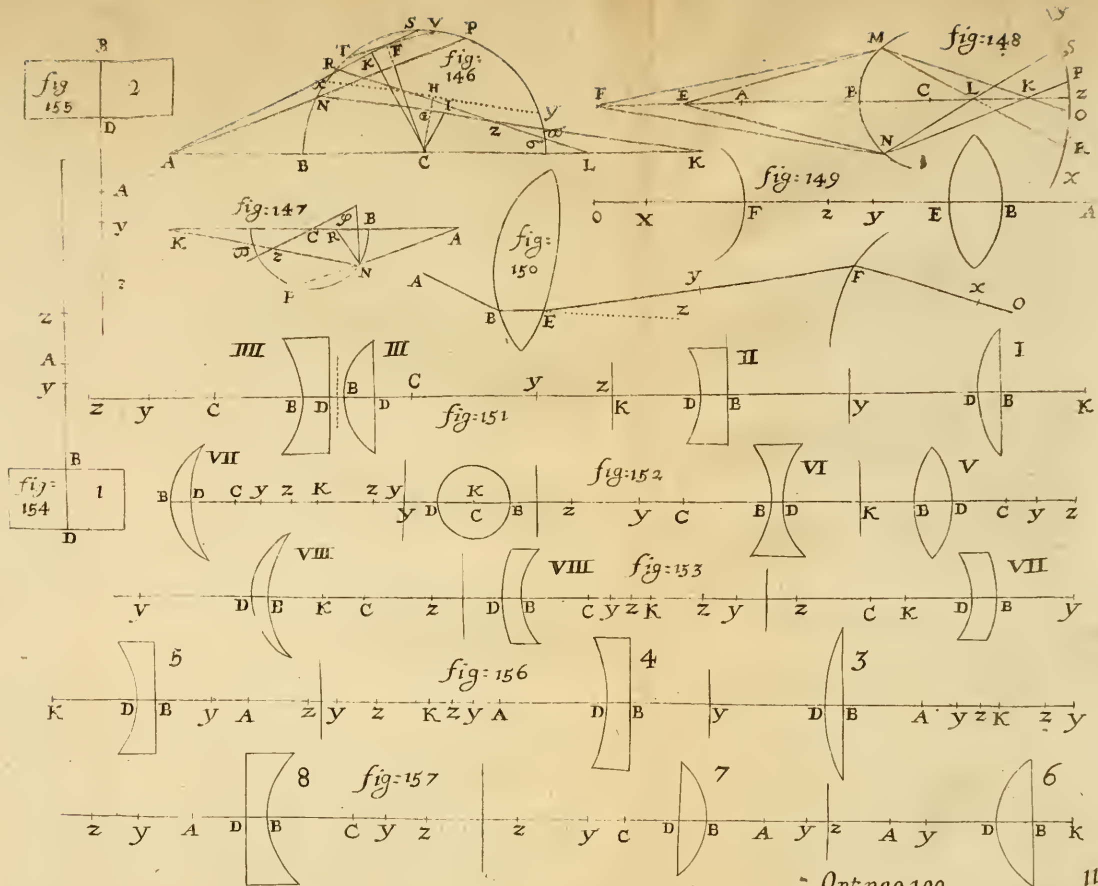


fig: 146
fig: 147
fig: 148
fig: 149
fig: 150
fig: 151
fig: 152
fig: 153
fig 154
fig 155
fig: 156
fig: 157

Opt pag 100

Si A cadat extra B C, fiat $AB - \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; sin A Fig. 159.
cadat inter B, C; fiat $AB + \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; deinde fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$.

Coroll. Ad integram Sphæram converg.

Si punctum A extra B C ponatur, fiat $AB + \frac{I - 2R}{I}AC :: BC . CY$. sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{2R - I}{I}AC . AC :: BC . CY$; & cape C Y ad partes centri versus A.

XV. *Ad lentem convexo-concavam diverg.* Fig. 160, 161.

XVI. *Ad lentem concavo convexam converg.*

1. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I}AC$; puncta Z, & Y versus A cadunt, facto $\frac{R}{I}AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I}AC$; fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape D Y versus A.

3. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I}AC$; fac $AB - \frac{R}{I}AC . AB :: BC . BZ$; & cape B Z adversus A. Jam quum Z cadit extra D K, tum primò si $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape D Y versus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R}KZ = DZ$, imago infinitè distabit.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$, & sume D Y adversus A.

6. Sed quando Z inter D, & K cadit; fiat $DZ + \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & sumatur D Y adversus A.

XVII. *Ad*

Fig. 160, 161, 162. XVII. *Ad lentem concavo-convexam diverg.*

XVIII. *Ad lentem convexo-concavam converg.*

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$.

1. Jam cùm Z cadit extra DK, tum primò si $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY adversus A.

2. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$; imagò infinitè elongabitur.

3. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY versus A.

4. Sed quando Z inter D, & K cadit, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & accipiatur DY versus A.

Hisce subnectam sequentia; non contemnendum in *Engyscopicis* usum præ se ferentia *Problemata*.

Fig. 163. I. *Dati puncti propinqui A perfectam imaginem per lentem concavo-convexam in aliud datum punctum Z lenti vicinius projicere.* (perfectam imaginem intelligo, quæ resultat ex omnibus, quos ipsum A diffundit, radiis in ipsa readunatis.)

Fiat $I - R . R :: AZ . ZB$. & dividatur ZB in C, ut sit $CB . CZ :: I . R$. tum centro C describatur circulus EBF. item centro Z intervallo quovis ZD (majori quam ZB) describatur circulus GDH; factum erit, nempe lens EFGH puncti A perfectam imaginem in punctum Z projiciet.

Nota, datâ CB puncta A, Z è propositis facilè determinari.

In vitro, si $CB = 15$, erit $\left\{ \begin{matrix} ZC = 9 \\ ZB = 24 \end{matrix} \right\}$ & $\left\{ \begin{matrix} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{matrix} \right.$

Adnotetur etiam per lentem EGHF ad Z tendentes radios ad A refringi.

Hujusmodi

Hujusmodi Vitrum Myopes juvat; pro quibus ità construatur: sit Z D distantia, ad quam optimè cernunt; sumatúrque Z B utcunque paullo minor quàm Z D; & fiat $CB = \frac{5}{8} ZB$; tum centro C per B describatur circulus E B F, & centro Z per D circulus G D H describatur; ipsi (Superficiei G D H oculum admoventes) punctum A distinctè spectabunt, velut ad Z situm.

Quòd si velit *Myops*, ad distantiam itidem Z D distinctè cernens, assignatum punctum A contemplari; adsumpto, ut priùs, liberè puncto B, fiat $CB = \frac{2\, AB \times ZB}{5\, AB - 3\, ZB}$; & reliqua fiant, ut priùs.

II. *Dati puncti A perfectam imaginem, etiam ope lentis concavo-convexæ, in datum aliud punctum Z longinquius projicere.* Fig. 164.

Fiat $AZ . AD :: I - R . R$. item dividatur A D in C, ut sit $CD . CA :: I . R$; & centro C per D describatur circulus E D F. item centro A, quopiam intervallo A B (minori quàm A D) describatur circulus E D F; factum erit; nempe lens E D F puncti A imaginem in punctum Z projiciet.

Datâ C B, puncta A, Z vicissim è propositis innotescunt.

In vitro, si $CB = 15$, erit $\left\{ \begin{array}{l} ZC = 9. \\ ZB = 24. \end{array} \right\}$ & $\left\{ \begin{array}{l} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{array} \right.$

Itidem & hîc, per lentem E F versus Z tendentes radii in A refringuntur.

Hinc *Presbytis* utile conficiatur *Vitrum*, hoc pacto: Ad intervallum Z D hi distinctè videant. Secetur Z D in A, ut sit $AD = \frac{3}{5} ZD$. item sit $CD = \frac{5}{8} AD$ (vel sit $CD = \frac{3}{8} ZD$) centróque C per D describatur circulus E D F. item utcunque sumpto puncto B (citra D nempe, versus A) centro A per B describatur circulus E B F. lente E F dicti *Presbytæ* punctum A distinctissimè conspicient. ||

Hisce demum in cumulum adjiciatur ab amico communicatus *Modus elegans ac expeditus cujuscunque casûs imaginem Geometricè designandi; ut & lentem describendi, quæ imaginem in datum punctum projiciet.*

1. *Imaginem designare.*

E centris, & verticibus circulorum lentem constituentium erigantur ad axin perpendiculares K j, B P, D Q, C I; deinde per punctum A ducatur quævis recta A P I secans B P, & C I in P, & I. fac $CI . CR :: I . R$. agatur recta R P secans D Q, & K ϱ in Q, & ϱ; fac $K\varrho . Kj :: R . I$; & agatur 1 Q, quæ producta secabit axin in Y, loco imaginis quæsito. || Fig. 165, 166, 167.

2. *Re-*

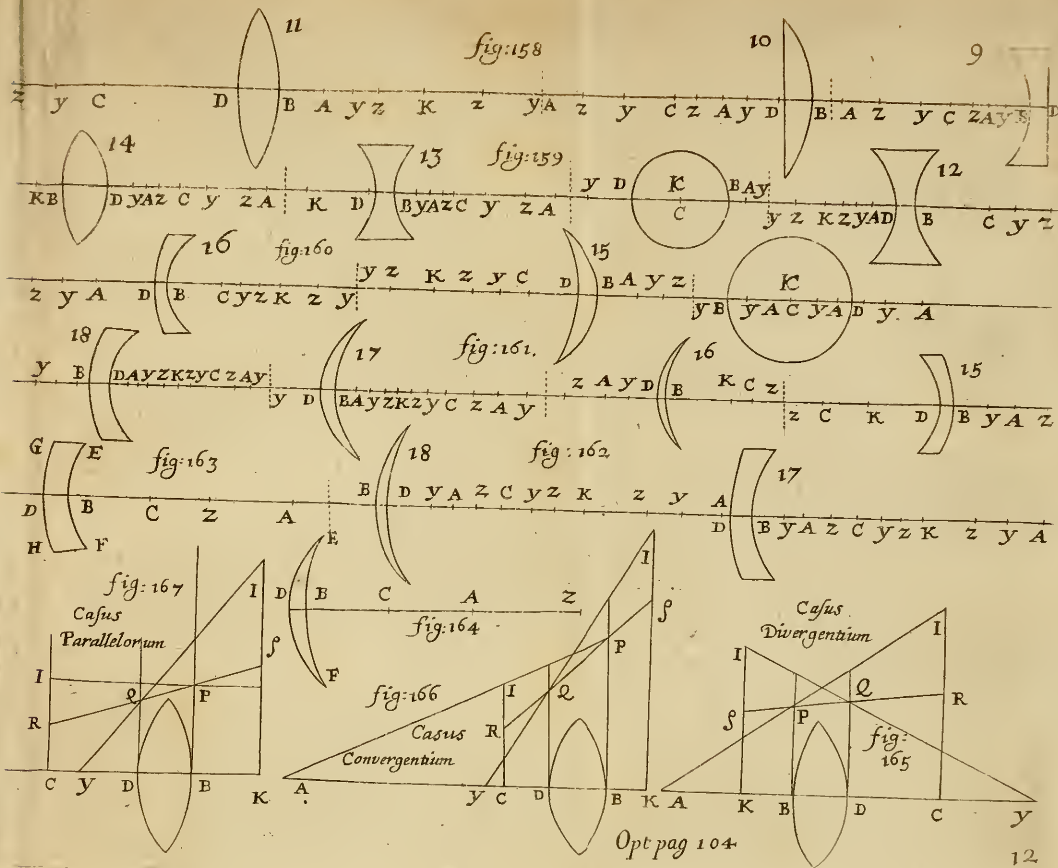
Fig. 168. 2. *Reliquis datis, lentem deſcribere.*

Sumantur ad arbitrium B Y diſtantia lentis ab imagine, B D craſſities lentis, & alter circulorum lentem conſtituentium ut (in hoc exemplo) anterior E B F, cujus centrum ſit C; & ad iſta puncta B, D, C erigantur B P, D Q, C I ad axin perpendiculares. deinde per punctum A ducatur recta quævis A P I ſecans B P, & C I in P, & I. fiat C I. C R :: I. R; & agatur R P ſecans D Q in Q. fiat D Q. D S :: I. R; & agatur S Y ſecans R P productam in ϱ; à quo demittatur perpendicularis ϱ K; & centro K intervallo D K deſcribatur circulus E D F; erit E B F D lens quæſita.

Hîc autem in nimium excreſcenti ſpatium Lectioni defigatur limes.

LECT. XV.

BEne longo circa lucis reflectiones, quatenus hæ viſum afficiunt, inſtituto ſtadio metam nunc opportunè fixuri videmur, ea quomodocunque proſecuti, quæ προυργιαίτερα nobis viſa, nec adeò pervulgata ſe objecerant. quod autem magnitudines objectas attinet (quas utique de punctis tantùm radiantibus agentes omnino videamur omiſiſſe) quales nimirum illæ ex hujuſmodi radiorum inflectionibus quoad ſitum, figuram, quantitatem mutationes ſubeunt, id fermè totum paſſim atque fuſiùs tractatum proſtat, nec animus eſt mihi toties actum agere, vel è trivio petita quæque huc transferre. quin & eò ſpectantia pleraque cuncta de jam definitis ac oſtenſis haud difficili negotio colligi poſſe videntur; ſingulorum nempe cujuſvis objecti punctorum (extremorum præſertim ac mediorum) apparentias indè determinando. verùm nec ea penitus neglectui habita, ad ſubſequentem quoque regulam (ſeu monitiunculam) preſſiùs animum advertentes forſan autumabitis. Si qualem aſſignata quævis ſuperficies inflectens (ſimplex aut compoſita) magnitudinis cujuſvis expoſitæ ſpeciem exhibet (ampliorem nempe vel contractiorem, directam aut inverſam, confuſam diſtinctámve, ſeu quovis alio modo demutatam) internoſcere cupiatis, id


fig:158
fig:159
fig:160
fig:161.
fig:162
fig:163
fig:164
fig:165
fig:166
fig:167
Casus Parallelorum
Casus Convergentium
Casus Divergentium
Opt pag 104.
12

id quadantenus hoc modo pertentantes attingetis: Oculi centrum (quale dari passim supponitur, ei saltem analogum quid dari videtur; nec indè, quoad illam quæ præ manibus rem, erroris quicquam proveniet) oculi centrum, inquam, ubicunque pro libitu constitutum ceu punctum radians concipiatur; tum ex eo duo prodeuntes radii ad propositam superficiem (eo quem hujus exigit natura vel proprietas specialis modo) inflectantur. tum inter hos inflexos collocatum intelligatur objectum; ejus certè species inter duos primos ab oculi centro procedentes radios consistet, quæ cum ipso (quoad apparentem anguli quantitatem, punctorum correspondentium positionem, & reliquas affectiones) objecto comparata voti compotes vos reddet; & id quidem perfectiùs, si extremorum ac mediorum præsertim objecti punctorum justas imagines, ex doctrina hactenus tradita, velitis investigare. ab appositis exemplis res manifestior evadet; in quibus notetur punctum O semper oculi centrum, rectam O B A radiationis axem (superficiebus inflectentibus perpendicularem, & objecta in partes æquales dirimentem) denotare.

Exemp. I. *Proponatur Superficies plana medii refringentis densioris (aquæ si placet, aut vitri) objectum continentis*, veluti Superficies à recta M N repræsentata. & ab oculi centro O prodeant utcunque duo radii O M, O N; qui in M F, N G refringantur; inter hos jam designetur objectum F A G (ab axe O A bisectum) hujus è medio F G M N spectati species (vel apparentia) alicubi consistet inter rectas O M, O N, veluti puta ad $\varphi\alpha\gamma$. cùm autem (ut ex hujusce superficiei natura, communíque refractionum lege palàm est) sit angulus φ O γ major angulo F O G; hæc objecti speciem amplificat inflectio. item cùm puncta (sibi respondentia) F, φ; & G, γ ad easdem respectivè partes jaceant, ab eadem objecti posito non immutatur. quòd si punctorum φ, α, γ positio juxta superiorem doctrinam strictiùs exquiratur, de totius imaginis $\varphi\alpha\gamma$ figurâ distantiâque satìs accuratum feretur judicium. Fig. 169.

Exemp. II. *Proponatur corpus densum* P M N Q, *Superficiebus planis parallelis* (M N, P Q) *comprehensum*; & ab oculi centro O prodeuntes radii O M, O N ad superficiem M N refringantur in M P, N Q; horum verò ad Superficiem P Q refracti sint P F, Q G (qui, propter incidentias (ad M, P, & N, Q) pares, ipsis O M, O N æquidistabunt) inter P F, Q G statuatur objectum F A G, cujus sit imago $\varphi\alpha\gamma$; tum verò manifestum est hìc se rem similiter habere ac in Exemplo præcedenti. Fig. 170.

P *Exemp.*

Fig. 171. *Exemp.* III. *Proponatur circulus ſpecularis concavus* M B N, & radiorum O M, O N reflexi ſint M F, N G (ſe decuſſantes in H, & cum ipſis O M, O N concurrentes punctis X, Y) inter hos collocetur objectum F A G; ejus itidem imago rectis O M, O N interjacebit, puta ad $\varphi \alpha \gamma$. comparando jam angulos apparentes F O G, $\varphi O \gamma$, clarè vides objecti F A G ſpeciem imminui. item cernis puncta ſibi reſpondentia F, φ, & G, γ ad alias ac alias partes jacere, ſeu objecti ſitum hinc inverti. Quòd ſi intra angulum & ſpatium X H Y ſtatui concipiatur objectum, clarum eſt hinc ejus quidem ſpeciem ampliari, ſed adhuc ſitum inverti. ſin inter ipſa X Y conſiſtat objectum, ejus itidem invertetur ſitus, at quantitas non immutabitur. demùm ſi intra angulum N H M conſtituatur objectum, puta R L S; cujus imago ſit $\rho \lambda \sigma$; evidens eſt hujuſce ſpeciem creſcere, ſitúmque retineri.

Fig. 172. *Exemp.* IV. *Proponatur circulus Specularis convexus* M B N; factíſque ſimiliter ac in eo quod immediatè præceſſit omnibus; nè plura prodigam verba, vides objecti F A G ſpeciem ($\varphi \alpha \gamma$) coarctari, ſed ejuſce poſitionem eandem perſiſtere.

Fig. 173. *Exemp.* V. *Proponatur lens aliqua (exempli gratiâ, lens plano-convexa)* M B N Q P. Radii O M, O N ad ſuperficiem M B N refringantur in M P, N Q; tum ipſi M P, N Q ad ſuperficiem P Q refringantur in ipſos P F, Q G (ſeſe decuſſantes in H, & cum ipſis O M, O N concurrentes ad X, Y) vides jam in prima figura, ſi objectum F A G infra X Y (verſus H) ſtatuatur, ipſum ab imagine $\varphi \alpha \gamma$ majus, quàm obtutu ſimplice, repræſentari. Quòd ſi inter ipſa puncta X, Y ſubintelligatur collocatum, ejus quantitas neutiquam immutabitur. at ſi ſupra X Y ſtatuatur objectum R L S, ejus ſpecies, ad $\rho \lambda \sigma$ conſpicua, diminuetur; ubique verò punctorum correſpondentium poſitio directa permanebit.

Fig. 174. In altera verò figura (ubi refracti P F, Q G verſus axem procurrentes convergunt) cùm objectum F A G citra punctum H ſumitur, vides ejus ſpeciem quantitate adauctam, at ſitu non mutatam. verùm objecti R L S ultra concurſum H poſiti imago $\rho \lambda \sigma$ nedum prototypo major eſt, at quoad ſitum etiam eidem inverſa.

Et hoc quidem pacto nulla non lens pro varia vel objecti vel oculi poſitione, objecti ſpeciem aliam exhibet ac aliam; nunc dilatat, tunc contrahit; modò rectam dat, mox inverſam; ſubinde propiùs adducit, nonnunquam longiùs amovet. Singulos caſus ad examen facilè rediges hoc ad ſpecimen aciem mentis intendendo. Quinimò

Quinimò methodum hanc leviculam adhibendo plerasque superficierum quarumvis inflectentium hujus generis affectiones (illas nempe quæ magnitudinum apparentes quantitates, positiones, distantias, figuras respiciunt) compluriúmque *Phænomenων* causas ipse statim operâ levi deprehendes; quibus in expressiùs deducendis libri plures ad tantam molem extumescere vel possunt, vel solent; ut mihi saltem opus non sit hujusmodi plura congerere. veruntamen nè pars hæc nimium deficiat, & quoniam nonnulla succurrunt animadversione non indigna, de magnitudinum etiam apparentiis, tam *Dioptricis* quàm *Catoptricis*, specialia quædam proponam; ea verò commodiùs sequentem præstolabuntur Lectionem.

Huic interim, nè abnormiter curta sit, aliquatenus explendæ *Problemation* hoc adnectam:

Exponatur oculo, cujus centrum O, longinquum objectum F G, ab oculi, circulíque refringentis axe A B O bisectum; datúsque sit angulus simpliciter (oculo nempe nudo) apparens F O G. item assignetur punctum Z, quod imago sit puncti A à circulo refringente facta; datus sit denuò ex refractione apparens angulus P O Q; propositum est circulum istum refringentem describere (vel determinare). Fig. 175.

Analysis. Factum esto; sit nempe circulus B N, qualis requiritur, cujus sit centrum C, vertex B; & qui rectam O P in N secet. ducatur C Y ad O F parallela, rectæque O P occurrens in Y, & connectatur C N. cùm itaque sit N Y refractus radii ad F O, vel C Y paralleli; erit C Y . Y N :: R . I . ergò ratio C Y ad Y N datur; & cùm prætereà angulus Y (dato F O P æqualis) detur, etiam (in triangulo C Y N) angulus C N Y innotescet. itaque triangulum C O N specie datur; unde ratio C O ad C N (vel C B) datur. est autem C B . C Z :: I — R . R. ergò ratio C B ad C Z datur. itaque ratio C O ad C Z quoque datur; unde ratio C O ad O Z datur. verùm O Z datur; ergò etiam C O datur. hinc demùm & ipsa C B datur.

Componitur autem in hunc modum. In O F utcunque capiatur $O\varsigma$, & fiat $O\varsigma . O\sigma :: R . I$. & connectatur $\sigma\varsigma\zeta$; ducatúrque Z R S ad $\zeta\sigma$ parallela. tum fiat O Z . Z T :: I — R . R (unde componendo O T . Z T :: I . R) item $V = \sqrt{ZT \times ZS}$; & $X = \sqrt{OZq - Vq}$; tum X . O Z :: O Z . Y. denique X . Y :: O Z . O C (unde erit X q . O Z q :: O Z . O C; hoc est O Z q — V q . O Z q :: O Z . O C; hoc est O Z q — Z T × Z S . O Z q :: O Z . O C). per C verò ducatur C N ad Z S parallela, secans O P in N. denique centro C per N ducatur circulus B N; is proposito satisfacit.

Nam

Nam ob $OZq - ZT \times ZS . OZq :: OZ . OC$; erit OZ cub $= OC \times OZq - OC \times ZT \times ZS$. transponendóque $OC \times ZT \times ZS = OC \times OZq - OZ$ cub. atqui propter $OZ . ZS :: OC . CN$. eſt $OZ \times CN = ZS \times OC$. quare $OZ \times CN \times ZT = OC \times OZq - OZ$ cub; adeóque (elidendo OZ) erit $CN \times ZT = OC \times OZ - OZq$. vel $CN . OC - OZ :: OZ . ZT$; hoc eſt $CB . CZ :: OT . ZT$. & componendo $BZ . CZ :: OT . ZT :: I . R$. itaque primò liquet punctum Z imaginem eſſe puncti A, ex refractione factam ad circulum BN. quinetiam ob $CY . YN :: \varrho O . O\sigma :: R . I$; palàm eſt NO refractum eſſe radii ad CY, hoc eſt ad FO paralleli. liquidò proinde conſtat propoſitum. ||

In hoc caſu debet eſſe $OZq \sqsubset ZT \times ZS$. Haud abſimili ratione quoad alios caſus (ut ſi circuli refringentis cavum objecto exponatur, &c.) peragetur negotium. ego ſpecimen tantùm *inſtitui Problematis*, juxta quod viſibilis objecti ſpecies per refractionem circularem ſecundum præſtitutas quantitatem atque diſtantiam utcunque poſſit immutari. ||

APPENDICULA.

UT hæc paullò ſtrigoſior Lectio nonnihil incraſſetur, faciam hîc (quanquam alienore loco) quod alibi (ſi mihi tunc in mentem veniſſet) factum oportebat; raciociniis noſtris adverſantem, à viro doctiſſimo (alioquin opinor raro dormitante) commiſſum paralogiſmum, nè cui fraudi ſit, detegam ac amoliar; unáque doctrinam noſtram confirmabo. horſum è præmiſſis conſequens, ſed & experientiæ (ut videbimus) conſonum hoc præſterno: E refractione quavis (nec non è reflectione ad circulum) duobus oculis apprehenſum objectum (puta lucidum punctum A) reverà duplum apparet, ſeu duas (ad minus) obtinet imagines.

Fig. 176. Nam à puncto A exeuntes inflectenti MN incidant duo quicunque radii AM, AN; quorum inflexi ſint ME, NF; concurrentes in X; in his autem uſpiam conſtituantur oculorum centra O, P. quòd puncti A imago nulla ad occurſum X exiſtat, è ſupra poſitis, ac probatis conſectatur (omnes enim imagines ad illa conſiſtere docuimus inflexorum puncta, ad quæ nulli illos alii inflexi interſecant) itaque duæ ſunt imagines puncti A, una in inflexo EM (qualis α) ad oculum O pertinens; altera in inflexo FN (qualis a) oculo P deputanda.

Hinc liquet etiam magnitudinis cujuſvis hoc modo ſpectatæ duplicem imaginem haberi.

Huic

Huic effato si contraria obtendatur experientia, monstrans subinde duntaxat unam imaginem apparere; regero, in refractione quidem ad superficiem planam apparenter hoc plerumque contingere, quoniam imagines istæ duæ (quales α, a) ita sibimet ipsis, ita refractorum concursui X vicinæ sunt, ut ipsarum intervallum discerni nequeat, ipsæque (sicut in simili casu obvenire mox ostendemus) velut in unam imaginem interceptibilitèr coalescant; ast in aliis diversi generis inflectionibus, etiam sensu contestante, manifestè secùs apparet; id quod cùm è compluribus admodum obviis experimentis constare possit, unum saltem ac alterum proponemus. Speculo B N M exponatur objectum A; tum oculis, velut ad O, P constitutis, apparebit ejusce duplex species α, a; quarum illa (α) clauso oculo O, hæc (a) clauso P disparebit. Fig. 177, 178.

Notetur autem, si placet, imaginum α, a intervalla (pro vario oculorum situ) nunc magìs, nunc minùs deduci, sic ut subinde coadunari videantur. Nempe si oculus P ad F concipiatur translatus, ducatúrque F G ipsi P O parallela, & æqualis; unde jam & oculus O in C positus concipiatur; quoniam F E minor est quàm F G, radius M O per G non transibit; transeat alter inflexus L G; in hoc itaque jam consistet imago α, ab altera a magìs elongata. Reliquarum hujusmodi diversitatum haud dispar assignari poterit ratio.

Adjungatur & hoc, an passim observatum nescio, dignum certè quod observetur: Ad speculum concavum R S M N faciem tuam F A G (speculo propiùs admotam) contemplare. Et primò quidem oculo O (altero P occluso) cernes ejus imaginem φ α γ; rursus (oculo O occluso) altero P conspicies imaginem fag, à priore φ α γ aliquantùm deflectentem; demùm utroque simul oculo recluso spectans illas in unam coalitas percipies; seu, speciem unam aspicies, perquam notabili discrimine, ampliorem priorum singularum alterutrà. Fig. 179.

Exhinc, obiter, suspicari licet, etiam intuitum simplicem adhibentibus objecta binis oculis spectata tantillo majora videri, quàm uno; speciebus ità coëuntibus, ut non exquisitè congruant.

Unicam prætereà subdemus instantiam: Per sphæram vitream (aut si mavis, per phialam conicam aut cylindricam aquâ repletam) M B N translucentem lucernulæ flammam A specta; ejus duas imagines α, a observabis (pro oculorum situ magìs à se minúsve dissitas) quarum una (α) clauso oculo O, altera (a) clauso P evanescet. Fig 180.

Videtur hæc instantia vel sola sufficere vulgari sententiæ refellendæ; juxta quam (ut *Keplerus* alicubi colligit) puncti A simplex imago ad punctum X consisteret. *Paralipom. pag.* 178.

Has

Has instantias, facilitatis gratiâ, ità proposuimus, quasi punctum A, unà cum duobus oculis O, P in plano existeret ad superficiem inflectentem recto. id quod utrùm in experiendo præcisè contingat nécne, parùm refert; duas utcunque species apparere liquet. quin facilè concipitur etiam eo posito rem non aliter se habituram.

His prælibatis, illud discutiamus, quod innuimus, ψευδογράφημα; quo nempe *P. Herigonius* propositionem hanc suam comprobatum it: * In Dioptr.
"Si oculus, & aspectabile sint in diversis mediis sè mutuo contingentibus, imago apparebit in concursu catheti, & radii ab oculo per punctum refractionis directè producti.

Fig. 181. Sit utique punctum F in medio densiori H L M N collocatum, quod ad oculos A, B radios F E A, F D B emittat refractos ad E, & D; & rectæ A E, B D conveniant in C; sit autem superficiei refringenti perpendicularis recta F G; erit (inquit) puncti F imago in recta F G. id quod ità demonstrat: Quoniam dicta imago tam in refracto A E, quàm in refracto B D existit, ergò in horum intersectione C existet. verùm intersectio C in recta F G existet; quoniam hæc communis est sectio planorum A E F, B D F superficiei refringenti rectorum. ergò liquet propositum.

In hanc demonstrationem adverto; 1. Supponit ea refractos A E, B D concurrere; quod tamen falsum est, præterquam in uno vel altero casu; quum nempe planum A B F in eodem existit cum ipsa recta F G plano; vel, cùm puncta A, B sunt in superficie coni recti, cujus axis est recta F G. quòd si prior casus ponatur, è suprà demonstratis manifestum est refractos A E, B D non in recta F G, sed intra angulum F G H convenire; quod è principiis nostris elicitum illum saltem constringere debet, qui principia ista admittit ac amplectitur. 2. Hinc, illa demonstratio ipsam se perimit: Nam, quoniam (in posito casu) puncti F imago tam in recta A E, quàm in recta B D existit, adeóque in harum concursu; concursus autem iste non est in recta F G; ergò liquet dictam imaginem extra rectam F G versari. 3. Supponit iste discursus (ut & suppar ille jamjam prolatus) puncti F unicam oculo utrique imaginem apparere; quod πρῶτον ψεῦδος erat, à nobis paullò supra refutatum. Enimverò diversi oculi sunt reipsâ diversi spectatores. hæc, opinor, ratiocinium illud satìs enervant. ||

Lect.

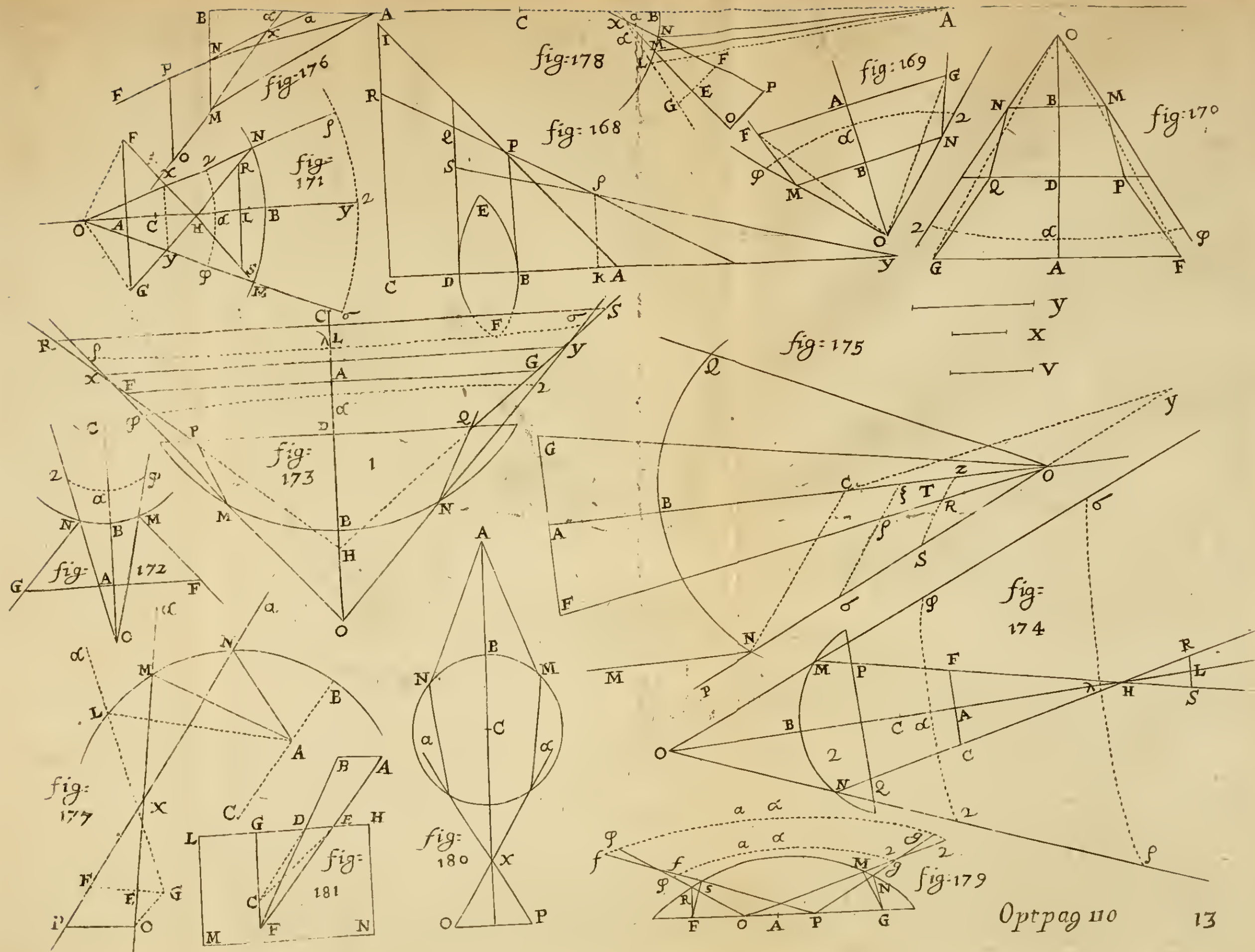


fig:176
fig:178
fig:168
fig:169
fig:170
fig:171
fig:175
fig:173
fig:172
fig:174
fig:177
fig:181
fig:180
fig:179

Lect. XVI.

I. *Punctorum ex inflectione determinatis apparentibus locis*, conquiescere possem; siquidem exinde magnitudinum apparentiæ deducuntur, quotlibet in ipsis existentium punctorum imagines designando. cæterùm nè justo parciùs in hac parte, vel illiberaliùs egisse videar, etiam *de rectarum linearum (consequenter & planarum superficierum, quibus distinctè visui repræsentandis natura præcipuè consuluisse videtur) apparentiis & imaginibus expressiora specimina quædam haud gravabor adnectere*. de quibus etiam circa reliquarum magnitudinum apparentias propius ac promptius fiat judicium.

II. Notetur autem imprimìs; Sicuti (quod sæpiùs in antedictis habetur insinuatum) cujusque puncti quodanimodò duplex est imago; una simplex, absoluta, principalis; illa scilicet, quæ in recta versatur ad superficiem inflectentem perpendiculari, perque radians punctum simul ac oculi centrum transeunte (hoc est in communi lucidæ radiationis, superficiei reflectentis, ipsiúsque visionis axe) altera verò relata, mutabilis, ac minùs præcipua; quæ talis est respectu oculi extra rectam inflectenti superficiei perpendicularem arbitrariè constituti; ità pari fermè modo duplex cujusque magnitudinis imago concipi potest una quidem absoluta (quam saltem hoc nomine designabo) quæ ex punctorum singulorum in ipsa existentium absolutis imaginibus quasi conflatur, illas saltem comprehendit (qualis in objecta congrua superficie vividè deformaretur; qualísque videretur oculo ad infinitam ab inflectente superficie distantiam ritè collocato) altera verò relata, quæ oculum respicit ubivis in certa positione constitutum; quid velim, & quare sic distinguam ab exemplis benè multis in decursu proponendis luculenter apparebit.

III. *Super-*

Fig. 182. III. *Superficiem planam media dirimentem (aquam si placet ac aërem)* repræsentet recta P Q, & aquæ insit recta F P ad P Q perpendicularis. fiat autem F P . X P :: R . I; erit X P imago absoluta rectæ F P; continet illa scilicet omnes locos punctorum, quæ in F P, oculo apparentes in ipsa F P sito. verùm si ponatur oculus uspiam extra F P, velut ad O, ei tota F P citra X P apparebit. transeat videlicet alicujus radii F M refractus per O, & protrahatur O M, ut occurrat ipsi F P in K. est ergò (secundum præmonstrata) punctum K inter X, & P. itidem (è prius ostensis) puncti F imago quæ in refracto O M K, ad oculum O relata, inter K, & M cadit, veluti puta ad φ. simili ratione cujusvis alterius in ipsa F P accepti puncti, ceu R, imago (cogita ϱ) citra rectam X P, versus oculum, jacet. totius itaque rectæ F P imago talis est, qualem curva linea $\varphi\,\varrho$ P refert. quòd si P F infinitè protrahatur, ejus totius imago P ϱ ϱ versus asymptoton O B A, ad P F parallelam, accedens excurrit.

IV. *Delineatur autem curva P $\varrho\,\varphi$ hoc modo*. ab O ducatur utcunque recta O M K secans rectam P Q in M; & (posito fore $S = \sqrt{Rq - Iq}$) sit $PH = \frac{Sq \times PM\,cub}{Iq \times FPq}$; atque per H ducatur H$\varphi$ ad P R parallela, ipsi O K occurrens in φ; erit φ in dicta linea; nempe, si O M K ipsius M F refractus concipiatur, erit punctum φ ipsius F imago. eodem modo reliqua lineæ P ϱ ϱ puncta designantur.

Fig. 182. V. Quinetiam adsumptâ rectâ F G ad P Q parallelâ, ductâque G Q ad F P (vel A B O) parallelâ; item per X ductâ X α Y ad P Q parallelâ, erit quidem recta X α Y rectæ F A G imago absoluta; verùm ejus imago ad oculum O relata citra rectam X Y tota jacet, eámque curva $\varphi\,\alpha\,\gamma$ repræsentat, admodum jamjam præscriptum punctatim delineabilis. itaque compositæ lineæ P F G Q, circa axem O B A rotatæ, imago fornicem referet arcuatam. id quod experiri vos velim vasculi cylindrici aquâ repleti superficiem inspectando.

Fig. 183. VI. Quòd si recta visibilis F G ad P Q inclinata sit, cum ea conveniens in V; & connectatur X V, erit rursus X Y ipsius F G imago absoluta; relatam verò curva $\varphi\,\alpha\,\gamma$ repræsentat.

Fig. 184. VII. Quòd si vicissim *oculus O in aqua ponatur constitutus*, & ab indè respiciatur recta P F in aëre posita, fiátque rursus P F . P X :: R . I;

R. I; erit quidem X P imago rectæ F P abſoluta; at ejuſdem imago relata (puta P ϱ φ ϱ) ultra P F R jacet, ab illa ſenſim reclinans; ejúſque puncta quælibet ità ſignantur. Ab O ducatur recta O K utcunque rectam P Q ſecans in M, & ſit K M ipſius F M refractus, tum (poſito rurſus $S = \sqrt{Iq - Rq}$) fiat $PH = \frac{Sq \times PMq}{Iq \times PFq} PM$, & per H ad P F parallela ducatur H φ, ipſam O M K interſecans ad φ; erit punctum φ in dicta linea, punctum ſcilicet F repræſentans. eodémque modo puncta quotlibet alia deprehendes.

VIII. Similiter rectæ F G ad ipſam P Q parallelæ, vel inclinatæ imago relata φ α γ (in partes arcuata contrarias illis, ad quas prioris casûs imago videbatur incurvata) determinabitur. rem appoſita figura ſatìs exprimit.

Hæc autem omnia de ſuprà comprobatis dilucidè conſectantur.

IX. Ac ità quidem circa ſimplices planas ſuperficies refringentes ſeſe res habet. Quòd ſi corpori parallelis planis M N, μ ν terminato exponatur recta F G; Sint rectæ F P, G Q, A D B O ipſi P Q perpendiculares, & fiat B D . B S : : I . R; adſumatúrque $A\alpha = DS$; & fiat A B . α ϐ : : F P . X P; & per X, α ducatur recta X α Y, erit X α Y lineæ F A G imago abſoluta. Ergò ejus imago ad oculum O relata (in hoc caſu) citra ipſam X α Y verſus ſuperficiem μ ν nonnihil incurvata diſponetur, qualem exhibet linea φ α γ. id quod ex eo ſatìs videtur liquere, quòd recta X α Y ſit imago reſpectu oculi in ipſa O B à B infinitè ſemoti. deſignari verò poterit hæc imago ad hunc modum. ſit *fag* (minuſculis elementis indigitata) imago rectæ F A G ad ſuperficiem refringentem μ ν relata (hoc eſt ad oculos in refractis f μ M, q ν N, a D B, reliquíſque, nec non in medio μ ν M N verſus O protenſo, ſitos) juxta proximè commonſtrata delineabilis. tum hujus ipſius *fag* velut in medio M N μ ν verſus A protenſo poſitæ, ex refractione ad ſuperficiem M N emergens, & ad oculum O relata conſtruatur imago φ α γ (itidem ad modum nuperrimè præſcriptum) hæc rectam F A G per corpus M N μ ν ſpectatam repræſentabit. experientia teſtis advocetur, ego pluribus in re perplexiore, quàm utiliore ſuperſedeo. Fig. 185.

X. Porrò quod *plana ſpecula* (ſimplicia, vel compoſita) attinet, in iis palàm eſt imagines abſolutas ac relatas omnino ſibi coincidere; quo fit, ut eæ objectorum magnitudines, figuras, diſtantias (ſitu

tamen nonnunquam inverſo) quàm exactiſſimè referant. qua de re (tam facili, toties acta) penitùs reticens ad minùs trita me promoveo.

Fig. 186. XI. Sit jam *Circulare Speculum convexum* DMB, cujus centrum C; & per C protendatur recta CBA, in qua ſumatur portio quædam AR, fiátque CA.AB::CX.XB; neq; non CR.RB::CY.YB; erit YX imago abſoluta rectæ RA; quòd ſi CB biſecetur in Z; erit BZ totius BA ad infinitum exporrectæ imago abſoluta; hoc eſt, illæ tales erunt oculi reſpectu in ipſa AB conſtituti. ſecùs autem uſpiam collocato oculo, tanquam ad O, totius AB quod conſpicuum eſt (hoc eſt quod ſupra horizontem OT, ſpeculo contiguum extat) ſupra citráque XB apparebit. Enimvero tranſeat radii AM reflexus KMO per O; itaque punctum K (quod olim oſtenſum) ſupra punctum X, verſus A, extat. quinetiam (ex indidem monſtratis) puncti A imagines omnes, oculum O reſpicientes, ex reflexione factæ ad partes BMD, citra CA verſus O, cadunt. ejus igitur imago quæ in OK, puta α, in ipſa KM exiſtet (id quod etiam, nè quis dubitet, exertius mox oſtendemus). ſimili ratione puncti R imago, cogita ϱ, ſupra Y, citráque BY jacet. quòd ſi porrò per O tranſeat recta ODLH, quæ reflexa ſit rectæ DS ad CA parallelæ (hæc autem quomodo ducatur, antehac declaratum habetur) erit in ODL imago puncti (quale concipiatur S) in ipſa AB infinitè ſemoti; hæc puta ſit ad σ. erit itaque curva $B\varrho\alpha\sigma$ imago totius infinitæ rectæ BAS, ad oculum O relata.

XII. Iſta verò linea tali pacto delineatur: Super diametrum CO deſcribatur circulus OTC; & ab O ducatur recta quæpiam OMF, cujus reflexa ſit MA; in qua ſumatur ME = MF; tum ſecetur FM in α, ut ſit $F\alpha . \alpha M :: AE . AM$; erit (è pridem demonſtratis) punctum α puncti A imago. ſimili modo quotcunque lineæ $B\alpha\varrho\sigma$ puncta reperiuntur.

XIII. Quòd autem ſit punctum α citra K (verſus oculum) ità conſtabit. Ducatur FQ ad AM parallela. eſt ergo angulus FQA par angulo CAM. aſt angulus FCA angulo ACE minor eſt. ergò eſt $CF . FQ \sqsubset CE . AE$. atqui $CF = CE$; quare $FQ \sqsupset AE$. ergò eſt $FQ . AM \sqsupset AE . AM$. hoc eſt $FK . KM \sqsupset F\alpha . \alpha M$. componendóque $FM . KM \sqsupset FM . \alpha M$. unde $KM \sqsubset \alpha M$. adeóque punctum α citra K verſus O jacet: Q. E. D.

XIV. Exhinc

XIV. Exhinc *Euclidis*, *Alhazeni*, communíſque fermè ſententia convellitur, quæ rectæ B A rectam B K, infinitæque B S ipſam B L imagines ſtatuit; proindéque corruunt omnia, quæ principio ſuperextruunt iſti gratìs adſumpto, rationique diſſentaneo. Veruntamen *Opticorum noviſſimus ſcriptor., erudittiſſimúſque vir*, veterum ipſe veſtigiis inſiſtens poſtulatum iſtud ab experientia ſtabilitum vult, ejúſque veritatem ſeſe deprædicat centies exploràſſe; doctrinam itaque noſtram invicto ſensûs teſtimonio refutavit. atqui repono, non potuiſſe illum quantumvis oculatum & ſagacem quod obtendit vel ſemel explorare. nec hoc in caſu poterit doctrina noſtra tentari, nedum refelli. nam (præterquam quòd perpendicularis C B A ſitum exactè dignoſcere perquam arduum, forſan impoſſibile fuerit) quum lineola B $\alpha\varsigma\sigma$ infinitam, juxta nos, lineam rectam B S repræſentet, ipſúmque punctum σ (infinitè diſſito puncto S reſpondens, atque rectam DH biſecans) à puncto L modicè diſtet, quæ amabò viſûs acies curvæ B $\alpha\sigma$ à recta B L deflectionem cernat? itaque fruſtrà eſſe videtur acutiſſimus vir, ad teſtem provocans hac in parte minùs competentem, déque cujus ſententia vix ullatenus conſtare poſſit. Sanè quoad affinem in *Dioptricis* caſum, quem attigimus ſupra, demiſſo in aquam perpendiculo, oculo ſimpliciter inſpectanti, videbitur ejus imago nihil quicquam à perpendiculari declinans; verùm ope reflectionis juſtum perpendicularis ſitum obſervando (qui nudo ſcilicet obtutu planè dijudicari nequit) notoriè deprehenditur aquæ immerſi perpendiculi imago ab ipſo deviare. neque dubito quin pariter in præſente caſu ritè conſulta experientia pro nobis ſit pronunciatura. Quinimò noſtris ex effatis (luculentâ opinor ratione ſuffultis) apparebit, unde principium illud multis in caſibus experientiæ videatur conſentire; quoniam nempe contingit, ut in iis à vero non multùm abſcedat; ejúſque proinde falſitatem ſenſus (niſi ratione, vel certiore ſenſu adjutus) perſpicere nequeat. aſt exorbito.

XV. Sit rurſus *Speculum concavum* B M D; cujus centrum C, & per C extendatur infinita recta C B L, biſecetúrque ſemidiameter C B in Z; ac in Z B ſumptis quibuſcunque punctis A, R; fiat C A. A B :: C X. XB; itémque C R. R B :: C Y. Y B; erit quidem infinita B L totius B Z imago abſoluta, & portio Y X portionis R A; verùm extra axem B C uſpiam conſtituto viſu, velut ad O, ad hunc relatæ ipſius Z B, ejúſque partium imagines ità determinantur. Fig. 187.

Fig. 187. XVI. Ad diametrum C O describatur circulus C F H; & ab O radius incidat talis, ut cum ejus reflexus sit D S, contingat fore $DS = \frac{1}{2}DH$, vel $\frac{1}{2}DI$; positâ C I ad D S perpendiculari (talis autem radius facilè duci posse concipiatur; & per curvam appropriatam reverà statim determinetur; id proinde nos non distinebit). Erit tum puncti S imago, puta σ, à puncto D infinitè disjuncta; quoniam (id quod fieri nequit, nisi $H\sigma$, σD, sint infinitæ) est $H\sigma . \sigma D :: IS . SD$. Jam in arcum D B cadat utcunque radius O M, cujus reflexus sit M A E; & in hac sumatur $ME = MF$; tum in O M producta capiatur punctum α, ut sit $F\alpha . \alpha M :: EA . AM$; erit α puncti A imago. simili methodo reperiatur ρ puncti R imago; neque non reliqua totius $B\rho\alpha\sigma$, ipsam B S referentis, puncta.

Fig. 187, 188. XVII. In hanc verò constructionem quædam veniunt adnotanda.

1. Quòd $CS \sqsubset CZ$. Nam $4CZq = CBq = 3SDq + CSq$ ergò quum sit $CZ \sqsubset SD$; erit $CS \sqsubset CZ$.

2. Quòd $CA \sqsubset CS$. Nam (è suprà monstratis) si ducatur recta $M\psi$ ad D O parallela, ejusce reflexa (puta $M\xi$) secabit ipsam D S, versus I, puta ad ξ. ergò $M\xi$ ipsam C B secabit supra punctum S; velut ad φ. atqui quoniam ang. $CMO \sqsubset CM\psi$, seu ang. $CMA \sqsubset CM\varphi$, est $CA \sqsubset C\varphi$; adeóque magis est $CA \sqsubset CS$.

3. Quòd $EA \sqsubset AM$. cùm enim sit E M (vel F M) $\sqsubset HD$; atque $DS \sqsubset MA$; erit $EM . MA \sqsubset FD . DS :: 2 . 1$.

4. Hinc denuò liquebit totam lineam $B\rho\alpha\sigma$ ultra rectam C B L jacere. nam ducatur F Q ad A M parallela est hìc ang $FCA \sqsubset$ ang ACE & ang $FQA =$ ang CAE. quapropter erit $CF . FQ \sqsupset CE . AE$. adeóque $FQ \sqsubset AE$. ac indè $FQ . AM \sqsubset AE . AM$; hoc est $FK . KM \sqsubset F\alpha . \alpha M$. dividendóque $FM . KM \sqsubset FM . \alpha M$. quare $\alpha M \sqsubset KM$. adeóque punctum α ultra K in recta O K protensa jacet.

XVIII. Quòd si ad partes alteras rectæ O D ducatur radius O N' cujus reflexus $NGT = NV$; sitque $TG . GN \sqsupset 2 . 1$; statuenda est puncti G imago (puta γ) ad partes O. quinimò cùm in hanc rem plura subjici possent, ego jam *Specimina* tantùm instituens (quippe cùm operâ dignum haud arbitrer adeò tenuem materiam curiosiùs prosequi) à minutiis abstineo. quò & indè pronior sum, quoniam in hac re copiosus videtur *A. Tacquetus*; subinde quidem is, ob admissum istud falsum principium, cespitans, at bene multa credo sugge-

ſuggerens haud aſpernanda. relinquantur igitur ei cætera, mihi ſuffecerit, quòd veriorem *Phænomena* detegendi declarandíque methodum adniſus ſim aliquatenus enucleare. pergamus ad alios caſus, haud ita pertractatos.

XIX Objiciatur ſpeculo M B N D recta F A G, rectæ C A (per ſpeculi centrum C tranſeunti) perpendicularis; adverto, ſi fuerit ipſa C A major quàm C Z, quadrans diametri B D, quòd rectæ F A G ad infinitum utrinque protractæ ad totum circulum (ejus ad partes intelligo concavas ſimul ac convexas) imago abſoluta (quinetiam imago ad oculum in ipſo centro C conſtitutum relata) erit *Ellipſis*. item ſi C A minor ſit, quàm C Z, quòd ipſius F A G imago abſoluta (vel dicto modo relata) conſtabit ex hyperbolis oppoſitis; ſi denuò C A ipſam C Z adæquet (vel F G per ipſum Z tranſeat) quòd ad parabolam ejuſmodi conſiſtet imago. Sed modum tranſgrederer hæc jam aggrediens demonſtrare. Expectent igitur. || Fig. 189.

Lect. XVII.

I. AD ea, quæ ſub finitam præcedentem propoſuimus demonſtranda *neceſſariam, alioquin notabilem, Conicarum Sectionum proprietatem* imprimìs oſtendemus.

Sit triangulum A C E, rectum habens angulum ad C; & indefinitè protractis lateribus A C, A E, in A C ſumatur quodpiam punctum X, ducatúrque XG ad C E parallela; inſeratur autem angulo CXG recta CZ æqualis ipſi XG; dico punctum indeterminatum Z ad ſectionum conicarum aliquam conſiſtere. Fig. 190.

II. Nempe primò, ſit angulus A ſemirecto minor (vel A C $\sqsubset$ C E) erit punctum Z ad ellipſin, quæ determinatur hoc pacto: Anguli L C P ſemirecti fiant (ad utramque rectæ C E partem) liquet igitur rectas C P ipſi A E occurrere, puta ad puncta R, & S. ab his

ad

ad ipsam E C parallelæ ducantur rectæ R T, S V; palam est indeterminatum punctum X inter limites T, V consistere (nam extra T V punctum quodlibet L accipiendo, & indè ducendo L I P ad C E parallelam, erit C L, hoc est L P, major quàm L I, unde à C ad rectam L I, nulla duci recta potest æqualis ipsi L I). Jam autem dico, quòd punctum Z ad ellipsin existit, cujus axis T V, focus C. Nam bisecetur T V in K; fiat $VD = TC$; ducatur K H ad C E parallela; per H ducatur H N ad C K parallela. Estque $KH = \frac{TR + VS}{2} = \frac{CT + CV}{2} = KT = KV$. Et quoniam $AV . AT :: (VS . TR$ (hoc est) $:: CV . CT ::) CV . DV$; erit per rationis conversionem $AV . TV :: CV . CD$. vel, consequentes subduplando, $AV . KV :: CV . CK$. dividendóque $AK . KV :: KV . CK$; hoc est $AK . KH :: KH . CK$. hoc est $HN . NG :: KH . CK$. quare $KH \times NG = CK \times HN = CK \times KX$. atqui est $CZq = XGq = KHq + NGq + 2 KH \times NG$. & $CXq = CKq + KXq + 2 CK \times KX = CKq + KXq + 2 KH \times NG$. ergo $KHq + NGq - CKq - KXq = CZq - CXq = XZq$. Ad alteras bisegmenti K partes sumatur $K\xi = KX$, ducatúrque $\xi\nu$ ad K H parallela, secans curvam T E Z V in ζ, & rectam A H in γ, ac ipsam N H in ν; erit quoque, simili ex discursu, $\xi\zeta q = KHq + \nu\gamma q - CKq - K\xi q$; unde liquet fore $\xi\zeta = XZ$; connexísque proinde rectis $C\zeta$, $D\zeta$, erit $D\zeta = CZ$; & $C\zeta + CZ = \xi\gamma + XG = 2 KH = TV$. ergò $C\zeta + D\zeta$ (vel $DZ + CZ$) $= TV$. unde perspicitur *curvam* $T\zeta ZV$ *esse ellipsin*, cujus *axis* T V; *foci* C, D.

Fig. 191. III. Sit autem secundò angulus C A E major semirecto (vel $AC \sqsupset CE$) dico punctum Z ad oppositas hyperbolas, consimili modo determinabiles, existere. enimverò factis (ad utramque rectæ C A partem) angulis semirectis A C P; & (ab ipsarum C P cum A E occursibus) ductis rectis R T, S V ad C E parallelis, punctum X extra limites T V necessariò consistet (etenim ubivis intra T V ductâ L I P ad C E parallelâ, erit $LI \sqsupset LP$, ideóque nulla par ipsi L I angulo A L I subtendi potest; id quod extra terminos hosce nil prohibet fieri) erit jam T V axis, & C focus hyperbolarum. Fiant enim omnia, quæ in casu præcedente; erítque rursus hic $KH = KV$. item ob $AV . AT :: CV . DV$; & (inversè componendo) AV.

AV.TV::CV.CD; & conſequentes ſubduplando, dividendóque AK.KV::KV.KD::KV.CK. vel AK.KH::KH.CK; hoc eſt HN (KX). NG::KH.CK; quare $CK \times KX = KH \times NG$. eſt autem $XZq = CZq - CXq = XGq - CXq = NGq + KHq - 2NG \times KH: - KXq - CKq + 2CK \times KX = NGq + KHq - KXq - CKq$. Sumatur $K\xi = KX$, diſcurſúmque ſimilem adhibendo liquebit fore $\xi\zeta = XZ$; & ideò $D\zeta = CZ$. unde $C\zeta - D\zeta$ $(DZ - CZ) = C\zeta - CZ = \xi\gamma - XG = 2KH = TV$. quare manifeſtum eſt *curvas* TZ, $V\zeta$ eſſe *Hyperbolas*, quarum axis TV, foci C, D.

IV. Tertiò demùm, ſit angulus CAE ſemirectus (vel $CA = CE$) erit tum punctum Z ad parabolam; quæ itidem ità determinatur. Fiat angulus ACP ſemirectus, & ab ipſarum AE, CP interſectione R ducatur RT ad CE parallela; erit T *Vertex*, atque C *Focus Parabolæ*. id quod ex bene nota ſectionis hujus proprietate conſtat; qua ſcilicet eſt $TA = TR = TC$ (ob angulos TAR, TCR ſemirectos) & $AX = XG = CZ$. Fig. 192.

V. Manifeſtum eſt verò rectam AE ſectiones has ad E contingere. quia nempe perpetuò major eſt CZ (vel XG) ordinatâ XZ; adeóque puncta G extra curvas unaquæque jacent hoc eſt tota AG extra illas cadit.

VI. Hiſce præſtratis: *Eſto Circulare ſpeculum* MBND, centrum habens C; cui exponatur recta quæpiam $F a G$; & huic perpendicularis ſit recta $C a$; quam ad partes averſas ſumpta CA, adæquet. Sit etiam CE ad CA perpendicularis, ac æqualis quadranti diametri BD; connexáque recta AE producatur utcunque. ſumpto jam in recta $F a G$ puncto quolibet F, connectatur FC, & radiationis ab F in ipſa FC limes, ſeu *focus*, ſit Z; ac per Z ducatur ZX ad AC perpendicularis, ipſi AE occurrens in H; dico fore XH parem ipſi CZ. Fig. 193.

Nam (è jam antè monſtratis) eſt FC.CZ::FM.MZ (hoc eſt) $:: FC - CB.CB - CZ$. hinc erit aC.CX (AC.CX) $:: FC - CB.CB - CZ$. quare (ducendo in ſe extrema, ac media) erit $AC \times CB - AC \times CZ = CX \times FC - CX \times CB$. hoc eſt (ipſi $CX \times FC$ ſubſtituendo $AC \times CZ$, propter aC.CX:: FC.CZ) erit $AC \times CB - AC \times CZ = AC \times CZ - CX \times CB$. tranſponendóque $AC \times CB + CX \times CB = 2AC \times CZ$.

hoc

hoc est $AX \times CB = 2\,AC \times CZ$; vel $2\,AX \times CE = 2\,AC \times CZ$; unde $AX . AC :: CZ . CE$; hoc est $XH . CE :: CZ . CE$. quapropter est $XH = CZ$: Quod E. D.

Quoad radiationem ad partes concavas, planè similis est discursus. examinetis ipsi, peto.

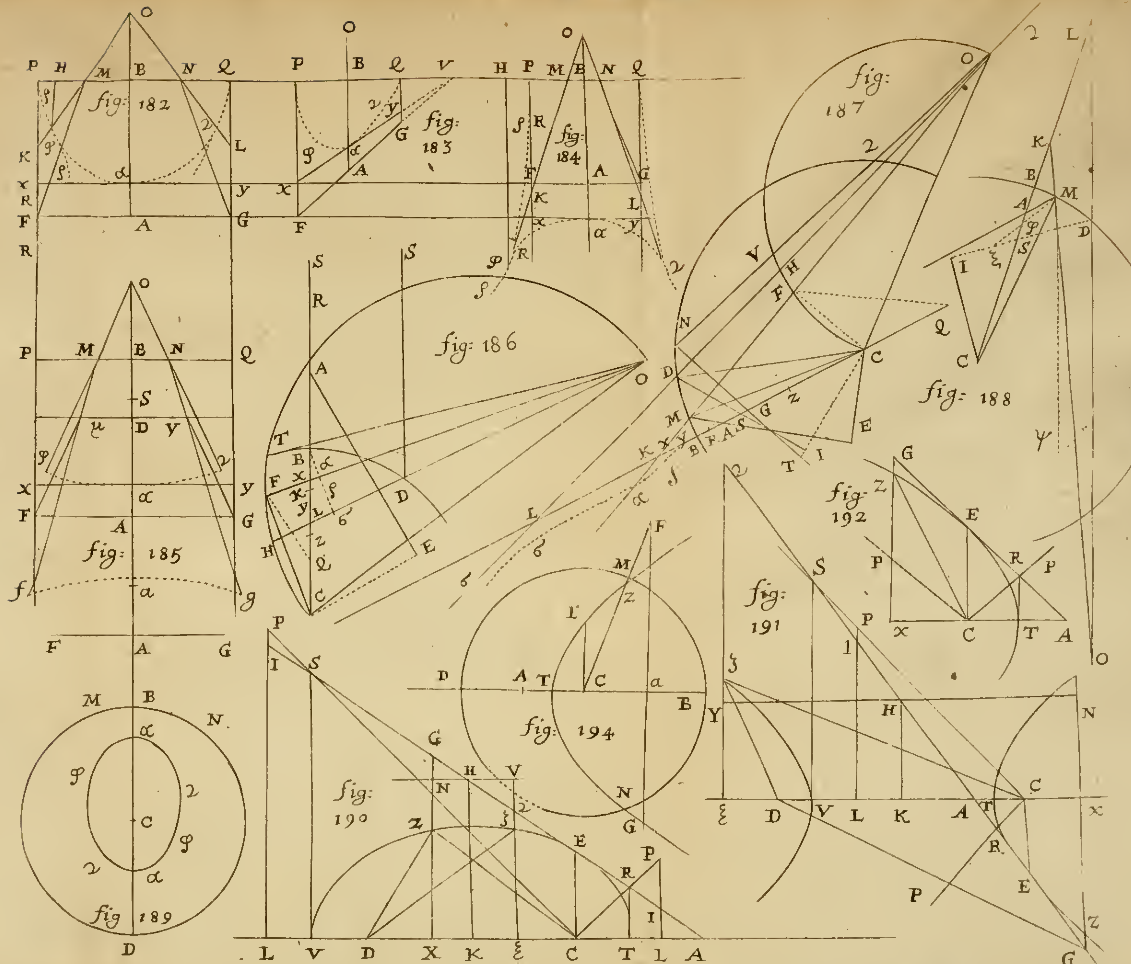
Fig. 193, 194, 195. VII. Exhinc evidenter liquet, si fuerit $CA \sqsubset CE$; quòd omnes punctorum F limites, seu foci (quales Z) ad ellipsin existunt; cujus *focus* C, & cujus *axis* TV è præmissis, non uno modo, determinatur. item si $CA = CE$, limites Z ad parabolam consistent cujus *focus* C, *axis* $CT = \frac{1}{2} CE$, *vertex* T. denuò, si $CA \sqsupset CB$, puncta Z ad *hyperbolas esse constat*, quarum itidem *focus* C; & *axis* TV facilè de modò (vel alibi) dictis reperitur; cunctarum verò sectionum *Parameter* ipsi CB æquatur.

VIII. Hinc in singulis respectivè casibus, ejusmodi *sectiones conicæ* sunt rectarum F*a*G absolutæ imagines; quin & eædem veræ sunt imagines ad oculum relatæ in speculi centro constitutum; ex reflectione scilicet ad concavas speculi partes effectæ; quæ solæ oculo sic posito conspicuæ sunt.

IX. Patet autem si recta F*a*G infinitè distet, quòd *ellipsis* in *circulum* abit. utì quoque si F*a*G per centrum transeat, quòd *hyperbolæ* istæ in rectam lineam degenerant.

X. Subnotetur etiam in casu quum *imago sit hyperbolica*, quod *hyperbolæ* YTY pars YEEY, neque non tota ζVζ ad circuli partes MBN pertinent; (nempe si centro C per E descriptus circulus ipsam FG intersecet punctis K, tota hyperbola ζVζ rectam interceptam KK referet; & hyperbolicæ lineæ alterius pars superior YEEY quod reliquum est repræsentabit hinc indè protensæ rectæ FG) pars autem ETE ad partem concavam MDN spectat. id quod suffecerit admonitum.

Fig. 196. XI. Et hæc quidem de rectæ FAG imaginibus absolutis; è quibus commodius de relatis judicum fiet. sit, instantiæ loco, oculus O, ad quem (convexis è partibus) ab F, & G reflectantur OMK, ONL; & sit ellipsis ZVYT absoluta (qualem modò definivimus) rectæ FAG imago; quam ductæ FC, GC punctis Z, Y secent. itaque punctorum F, G imagines ad O relatæ (puta φ, & γ) extra ellipsin


fig: 182
fig: 183
fig: 184
fig: 185
fig: 186
fig: 187
fig: 188
fig 189
fig: 190
fig: 191
fig 192
fig: 194

Opt pag 120

ellipsin jacent. Nam punctum K inter F & Z; ac punctum φ inter O, & K; nec non punctum L inter G, & Y; atque punctum γ inter O, & L cadunt. imaginis itaque $\varphi\,\alpha\,\gamma$ figura ad ellipticam accedit; eâ tamen aliquanto planior & compressior. non dissimili ratione quoad imagines ad concava factas, & quoad cæteros casus instituetur judicium. tædii plenum esset omnia singillatim percensere. quinetiam è præmissis luculentè constat quo pacto linea $\varphi\,\alpha\,\gamma$ præcisè describatur, punctatim utique. circa refractiones paria veniunt præstanda; postquam tamen paullùm respiravero; nunc enim verbo quidem pauca, rei qualitatem, studiúmque demonstrandis istis impensum respectando, satìs fortasse multa videor tradidisse. ||

LECT. XVIII.

I. P*Ropositum est jam nobis rectæ lineæ ex refractione prognatas ad circulum imagines designare*; nempe primùm absolutas; quorsum hoc spectat *Theorema*:

In circulum (e.g. medii densioris) refractivum M B N D radiet recta F A G; huic verò perpendicularis sit recta C A (circuli centrum C permeans) tum in recta F G sumpto liberè puncto F ducatur recta F C; & in hac sit punctum Z limes (qualem anteà fiximus) radiationis à puncto F; sit autem Z X ad A C normalis. porrò fiat C A . C R :: I . R; & A R . C B :: C R . C E (ponatur autem C E ad X Z parallela) tum connexa R E cum ipsa X Z conveniat in H. dico fore X H = C Z. Fig. 197.

Nam (è præmonstratis) est F C × M Z . F M × C Z :: I . R :: C A . C R. hoc est F C × C M + F C × C Z . F C × C Z − C M × C Z :: C A . C R. quare (ducendo in se extrema, mediáque) est F C × C M × C R + F C × C Z × C R = F C × C Z × C A − C M × C Z × C A = F C × C Z × C A − C M × F C × C X (quoniam scilicet est

R CZ.

$CZ.FC::CX.CA$; adeóque $CZ \times CA = FC \times CX$). quapropter (elidendo FC) eſt $CM \times CR + CZ \times CR = CZ \times CA - CM \times CX$; transponendóque $CM \times CR + CM \times CX = CZ \times CA - CZ \times CR$. hoc eſt $CM \times RX = CZ \times AR$. quare (ad analogiſmum redigendo) eſt $AR.CM::RX.CZ$. hoc eſt $CR.CE::RX.CZ$. hoc eſt $RX.XH::RX.CZ$; unde $XH = CZ$: Quod E.D.

II. Exhinc (& ex iis quæ circa *ſectiones conicas* nuperrimè ſunt oſtenſa) liquidò conſectatur, ſi CR major fuerit quàm CE (vel quod eódem recidit, AR major quàm CB) quòd punctorum omnium F in recta FAG imagines abſolutæ (quales Z) ad *ellipſin* conſiſtent, cujus *Focus* C, cujúſque penitus determinandæ modum ſatìs facilem tunc oſtendimus. item ſi $CR = CE$, quòd imagines iſtæ ad parabolam erunt; & denique, ſi $CR \sqsupset CE$, quòd eædem in hyperbolis oppoſitis reperientur; quarum etiam ſectionum focus communis eſt punctum C, & quarum axes deſignandi modum reliquáque circa ipſas præſertim advertenda declaravimus. (Nempe, ſi rectæ CP cum ipſa CA ſemirectos conſtituant angulos; & hæ rectam RE interſecent ad puncta S, indéque demittantur ad AC perpendiculares ST, SV, erunt T, V axis termini, rectáque CE ſemi-parameter erit) unde patet totius rectæ FAG ad infinitum protenſæ abſolutam imaginem (quin & illam, quæ ad oculum in centro C poſitum refertur) aliquam eſſe dictarum conicarum, pro ſuo peculiari ſitu hanc vel illam reſpectivè.

Fig. 198. III. Adnotari porrò debet in iſto caſu, *ſectionis ellipticæ* (quinetiam & *parabolicæ*) TEZ partem anticam TE ad concavas circuli partes LDL ſpectare; ſicuti poſtica EY ad convexas MBN pertinet. in hoc autem altero tota *hyperbola* ZVZ, nec non *hyperbolæ* ETE pars (infra ECE) $YEEY$ ad partem circuli convexam referri debent (nempe ſi centro C, intervallo CE deſcriptus circulus rectam FG ſecet punctis K, K; hyperbola ZVZ rectam interceptam KK repræſentabit, ipſiúſque FG quod reliquum eſt hinc indè protenſum pars $YEEY$ referet) pars autem ſuperior ETE ad cavam circuli partem LDL ſpectat. || Semper autem (cùm hìc, tum ubique) intelligatur ad utraſque propoſiti circuli partes ejuſdem generis refractionem effici, ſeu ejuſdem ſpeciei medio radios incidere.

IV. Ex his obiter naturæ, quam in oculi figura conſtruenda adhibuit,

buit, solertia quadantenus elucescere videatur, seu ratio quædam assignari possit, cur oculi fundus *Sphæroïdicam* (aut ab hac non multùm abludentem) nacta sit figuram. quia nimirum illa planorum objectorum modicè distantium (quibus in distinctiùs apprehendendis potissimus versatur usus) excipiendis simulachris est accommodatissima. Sed hoc παρεισοδικῶς.

V. In reliquis refractionum casibus paria fermè contingunt, quos ideò tacitus præterlabi possem; at minuendo vestro labori, seu quò clariùs & promptiùs de iis constet, non gravabor & illos vobis ob oculos ponere: nempe

Rarioris medii circulo M B N objiciatur recta F A G, cui normalis Fig. 199.
C A; sítque punctum Z puncti cujusvis F, in F G sumpti, imago absoluta; & Z X ad C A perpendicularis; ac $CA . CR :: I . R$; & $RA . CB :: RC . CE$; & ipsi R E connexæ occurrat X Z protracta ad H; eritque rursus $XH = CZ$.

Nam est $CA . CR :: (FC \times MZ . FM \times CZ ::) FC \times CZ - FC \times CM . FC \times CZ - CM \times CZ$. quare $CR \times FC \times CZ - CR \times FC \times CM = CA \times FC \times CZ - CA \times CM \times CZ = CA \times FC \times CZ - FC \times CM \times CX$. ac indè $CR \times CZ - CR \times CM = CA \times CZ - CM \times CX$. transponendóque $CR \times CZ - CA \times CZ = CR \times CM - CX \times CM$; hoc est $RX . CZ :: AR . CM :: RC . CE :: RX . XH$. quapropter est $CZ = XH$.

VI. Hinc dilucidè rursus apparet rectæ F A G imaginem absolutam (vel ad oculum in centro C situm relatam) si $RC \sqsubset CE$, *ellipticam* fore; sin $RC = CE$, fore *parabolicam* (quarum sectionum pars anterior E T E ad convexam circuli refringentis partem Fig. 200.
M B N pertinet, posterior Y E E Y ad cavam L D L). Quòd si fuerit $RC \sqsupset RE$, ejus *imago hyperbolica erit*; & quidem *hyperbolæ* Y T Y pars superior E T E ad circuli partem N B N referenda est; pars autem inferior Y E E Y unà cum tota hyperbola ζ V ζ ad partes concavas L D L pertinebit. nempe si fuerint rectæ C K æquales ipsi C E, tota hyperbola ζ V ζ interceptam punctis K rectæ F G portionem referet, ejúsque quod hinc indè protensum superest ab ipsa Y E E Y repræsentabitur.

VII. Porrò, quoad omnes hosce casus animadvertere licet posse sectionem eandem conicam innumeris rectis lineis ad diversos circulos

concentricos expositis repræsentandis inservire. nimirum in casu postremo, si reliquis stantibus punctum A indeterminatum ponatur, nihilominus hyperbolæ $\zeta \upsilon \zeta$, Y T Y rectas F A G repræsentabunt ad circulos, quorum semidiametri C B ipsis A I singulæ respectivæ singulis æquantur, modò semper intelligatur esse C A . C R :: I . R. id quod satis fuerit obiter admonuisse.

VIII. Ut & illud cursim innuisse suffecerit, quòd sicut à conicis sectionibus rectæ lineæ, ità vicissim *conicæ sectiones* à rectis lineis ex justa congruos ad circulos inflectione repræsentantur; quos utique non arduum videtur è præmissis deducere.

IX. Ut & exindè *datâ conicâ sectione* circulus & recta facilè designantur, ità ut conica rectam illam repræsentet ex inflectione ad istum circulum. Nempe si à foco C ad axem C V applicetur normalis C E; & recta E R sectionem tangat ad E; factóque C R . C A :: R . I; ducatur per A recta A I ad C E parallela; sítque C B = A I; tum centro C per B ducatur circulus M B N, peractum erit negotium.

X. Ex his tandem de imaginibus ad oculum ubicunque collocatum relatis, quales illæ figuras ac situs obtinent, proclivius erit judicare. scilicet eæ saltem unum (in recta per oculi, circulíque refringentis centrum trajecta positum) commune cum absolutis punctum habent; quoad reliqua verò respectiva puncta nonnihil ab his deflectunt ad eas partes, quas oculi situs peculiaris, & radiorum cursus exigunt; id quod facilius sit in singulis casibus qualiter eveniat perspicere, quàm verbis universim explicare. sed enim unam rei declarandæ subjiciemus instantiam. Ad oculum O refringantur ab F, & G radii FMO, GNO; sit autem *ellipsis* T Z V Y rectæ F G absoluta imago, quam connexæ F C, G C punctis Z, Y secent (ità quidem ut Z sit puncti F, Fig. 201. & Y puncti G imago absoluta) enimverò, de supradictis colligitur punctum K supra Z versus C existere; quinetiam puncti F in recta M O imaginem (puta φ) ultra F Z jacere. Similiter puncti G imago (γ) supra Y, ultráque G Y sita est. unde conjectura fiet de totius imaginis $\varphi \alpha \gamma$ positione, seu figura ad *ellipticam* accedente, qualis in apposita exhibetur figura; quæ certè (quanquam haud absque nimiâ molestiâ) juxta theoriam suprà constabilitam accuratè poterit delineari.

XI. Ità

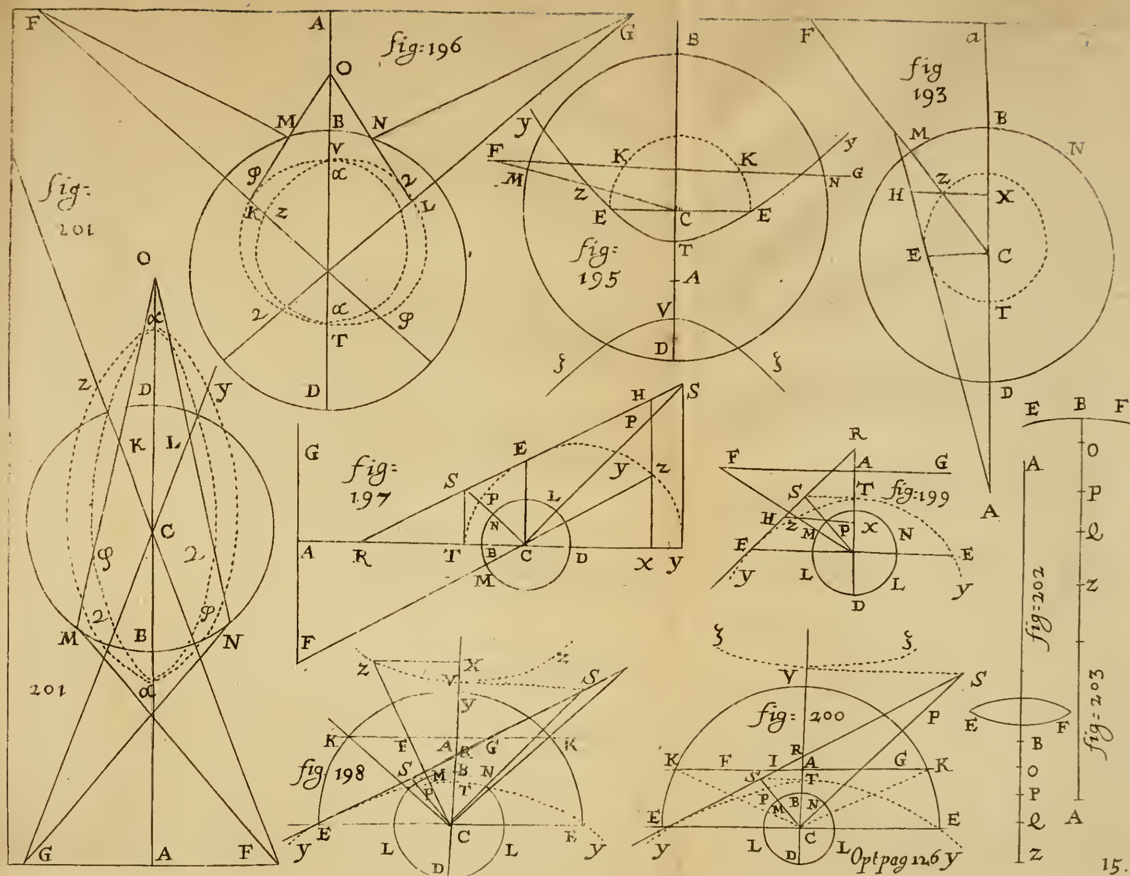
XI. Ità rectarum linearum ad sphæricam superficiem ex inflectione quavis procreatas imagines qualitercunque liceat definire. unde de planarum quoque superficierum ad eandem repræsentationibus haud difficilè statuetur; harum scilicet imagines absolutæ *conoidum aut Sphæroidum Superficies erunt* è rectarum imaginibus respectivis circa radiationum axes conversis progenitæ; quin & relatæ quoque planarum superficierum imagines è rectarum imaginibus relatis simili pacto progenerantur. rem totam ipsi mentem aliquantillùm advertentes perspicietis; me λεπτολογίας extremæ fastidium capit.

XII. Restare videtur, ut quomodò compositæ superficies sphæricæ objectas repræsentant lineas dispiciamus. verùm cùm imagines indè prognatæ sint altioris gradûs lineæ, ab usu notitiàque communi segregatæ, atque proprietatibus intricatis præditæ; nil aliud quàm operam luderem iis desudans extricandis. illas itaque transiliam; hoc commonens unicum, punctorum in illis aliquot principalium positiones è præmonstratis dignosci, de cæteris commodiùs ex conjectura dijudicari.

XIII. Hæc sunt, quæ circa partem *Opticæ* præcipuè *Mathematicam* dicenda mihi suggessit meditatio. circa reliquas (quæ φυσικώτεραι sunt, adeóqve sæpiusculè pro certis principiis plausibiles conjecturas venditare necessum habent) nihil ferè quicquam admodum verisimile succurrit, à pervulgatis (ab iis, inquam, quæ *Keplerus*, *Scheinerus*, *Cartesius*, & post illos alii tradiderunt) alienum aut diversum. atqui tacere malo, quàm toties oblatam cramben reponere. proinde receptui cano; nec ità tamen ut prorsus discedam, anteaquàm improbam quandam difficultatem (pro sinceritate quam & vobis & veritati debeo minimè dissimulandam) in medium protulero, quæ doctrinæ nostræ, hactenus inculcatæ, se objicit adversam, ab ea saltem nullam admittit solutionem. illa, breviter, talis est: *Lenti vel speculo cavo* E B F exponatur visibile punctum A, ità distans, ut radii ab A manantes ex inflectione versus axem A B cogantur; sitque radiationis limes (seu puncti A imago, qualem supra passim statuimus) punctum Z; inter hoc autem & inflectentis verticem B uspiam positus concipiatur oculus. quæri jam potest, ubi loci debeat punctum A apparere. retrorsum ad punctum Z videri natura non fert (cùm omnis impressio sensum afficiens proveniat à partibus A) ac experientia reclamat. nostris autem è placitis consequi videtur ipsum, ad partes anticas, Fig. 202, 203.

ticas apparens, ab intervallo longissimè dissito, (quod & maximum sensibile quodvis intervallum quodammodò exsuperet) apparere. cùm enim quò radiis minùs divergentibus attingitur objectum, eò (seclusis utique prænotionibus, & præjudiciis) longiùs abesse sentiatur; & quod parallelos ad oculum radios projicit, remotissimè positum æstimetur; exigere ratio videtur, ut quod convergentibus radiis apprehenditur, adhuc magìs, si fieri posset, quoad apparentiam elongetur. quin & circa casum hunc generatim inquiri possit, quidnam omninò sit, quod apparentem puncti A locum determinet, faciátque quòd constanti ratione nunc propius, nunc remotius appareat; cui itidem dubio nihil quicquam ex hactenus dictorum *Analogia* responderi posse videtur, nisi debere punctum A perpetuò longissimè semotum videri. Verùm experientia secùs attestatur, illud pro diversâ oculi inter puncta B, Z positione variè distans; nunquam ferè (si unquam) longinquius ipso A liberè spectato, subindè verò multo propinquius adparere; quinimò, quò oculum appellentes radii magìs convergunt eò speciem objecti propiùs accedere. nempe, si puncto B admoveatur *oculus*, suo (ad lentem) ferè nativo in loco conspicitur punctum A (vel æquè distans, ad *speculum*;) ad O reductus oculus ejusce speciem appropinquantem cernit; ad P adhuc vicinius ipsum existimat; ac ità sensim, donec alicubi tandem, velut ad Q, constituto oculo objectum summè propinquum apparens in meram confusionem incipiat evanescere. quæ sanè cuncta rationibus atque decretis nostris repugnare videntur, aut cum iis saltem parùm amicè conspirant. Neque nostram tantùm sententiam pulsat hoc experimentum; at ex æquo cæteras quas nôrim omnes; veterem imprimìs ac vulgatam, nostræ præ reliquis affinem ità convellere videtur, ut ejus vi coactus doctissimus *A. Tacquetus* isti principio (cui penè soli totam inædificaverat *Catoptricam* suam) ceu infido ac inconstanti renunciârit, adeoque suam ipse doctrinam labefactârit; id tamen, opinor, minimè facturus, si rem totam inspexisset penitiùs, atque difficultatis fundum attigisset. Apud me verò non ità pollet hæc, nec eoúsque præpollebit ulla difficultas, ut ab iis quæ manifestè rationi consentanea video, discedam; præsertim quum ut hîc accidit, ejusmodi difficultas in singularis cujus piam casûs disparitate fundetur. nimirum in præsente casu peculiare quiddam, naturæ subtilitati involutum, delitescit, ægrè fortassìs, nisi perfectiùs explorato videndi modo, detegendum. circa quod nil, fateor, hactenus excogitare potui, quod adblandiretur animo meo, nedum planè satisfaceret. Vobis itaque nodum hunc, utinam feliciore conatu, resolvendum committo. Ità demum, *Auditores Optimi*, *Valeatis*.

FINIS.


fig:196
fig 193
fig: 195
fig: 201
201
fig: 197
fig:199
fig 198
fig: 200
fig:202
fig:203
Opt pag 126
15.

ERRATA.

PAg.3.lin.25 luce.(præsente, leg. luce(præsente p4, l 21, desceptatur l disceptatur ib. l 31, valeat, id l valeat id p 5, l 31, toto l tota, p 6, l 23, dici l dicitur, p 11, l 10, allas l alias, p 13, l 27, proximo l proximos, p 14, l 12, contranisimum l contranisum, p 14, l 16, effectant l affectant, p 15, l 14, nobile l mobile, p 16, l 20, in quæ l in iis quæ, p 17, l 3, substracto l substrato, p 17, l 5, citentur fig 10, p 17, l 20, fig 12 l fig 11, p 18, l 11, fig 13 l fig 12, p 19, l 17, transmitti l transmittit, p 22, l 21 προλεπτικῶς l προληπτικῶς, p 23, l 6, incidentes (radios l incidentes radios, p 23, l 19, S B protracta l S B (protracta, p 28, ambages. I. Demonstratæ prostant l ambages demonstratæ prostant. I. Ut in *Parabola*, p 29, l 25, citentur fig 29, p 29, l 30, puncto divergentium tanquam l puncto divergentium radiorum reflexi rursus divergunt tanquam, p 29, l 32, suo l seu, p 32, l 10, fig 34, 35 deleatur, & citentur ad lineam 31, p 33, l 4, citentur fig 36, *ibid.* l 6, citentur fig 37 & 38, p 38, l 28, I q. R. A B. T l I q. R. & A B. T p 40, l 17, Sc l Si, ib. l 33, quoquam l quaquam, p 41, l 24, abeoque l adeoque, p 45, l 7, recissimi l rectissimi, ib. l 8, propriores l propiores, p 47, l 24, resignare l designare, p 48, l 1, Z 2, l 2. ib. l 12, Nocetur si fuerit H N P l Notetur si fuerit H N ϖ, p 57, l 4, ejusce l cujusce, p 65, l 4, existimari l existimare, ib. l 22, ipse l esse, p 67, l 13, interjaceret l interjacet, p 70, l 3, posteribus l posterioribus p 71, l 32, Adversatur l Advertatur, p 71, l 15, γ S γ v l γ S. γ v. p 78, l 1, in eodem l eodem, p 89, l 25. ratiori l rariori, p 90, l 17, expansem l expensam, p 95, l 14, relectionibus l reflectionibus, ib. l 40, Sinus l Simus, p 96, l 3, simplicime l simplicissime, p 97, l 8, quæsitam l quæsitum, p 105, l 28, Posito l Positio, p 112, l 26, admodum l ad modum.

Lectio I.

NOvum jam ingredior dicendi campum; amæniorem ſanè neſcio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypotheſium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) neceſſariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione; ſeu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum ſpecies. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta poſſit, & reverà produci. Poſſunt autem, qui ſaltem hactenus uſurpati ſunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum ſe mihi jam cogitanti ſuggerentia ſunt hæc; *per motus locales; per interſectiones magnitudinum; per quantitate poſitionéque determinatas ab aſſignatis locis diſtantias; per ductus magnitudinum in magnitudines; & per applicationes magnitudinum ad magnitudines; per aggregationem magnitudinum ordine certo diſpoſitarum; per appoſitionem magnitudinum ad alias, vel ſubductionem ab aliis; per organicam demùm* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & ſi qui ſunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo ſupponant oportet, utpote ſine quo nil procreari poteſt, eſt iſte, *qui per motum localem*. De quo proinde primo diſpiciendum. De motu celebratur illud *Ariſtotelis* effatum, *ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης αὐτῆς (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν*: ignorato motu neceſſariò naturam ignorari; in Phyſicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (ſaltem quantùm humanus intellectus aſſequi valet, aut experientia commonſtrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non abſque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione; de cauſis, de differentiis complura ſubtiliter argutantur Phyſici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi*

3 *Phyſ. I.*

vel curæ. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimùm à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis*, *& quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet ἐξωτερικὰ quæ velim quam primum ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditiùs fluant & limpidiùs. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet; agyrtæ ſecùs futuri. quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter,& quantùm potero λεπτολογήματα defugiens. Abſtractè loquendo,tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere; fuiſſe cùm hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe,ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, ſimultaneóq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt; ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, ἰσόχρονα fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter durâſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſiêrit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro

pro modo permanentiæ rerum in ſuo eſſe. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? reſpondeo, ſicut ante conditum mundum fuit ſpatium, & extra mundum nunc eſt & quidem infinitum cui Deus coëxiſtit) quatenus potuerunt olim, & poſſunt jam exiſtere talia tantáque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non ſunt; ità priùs mundo, & ſimul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & eſt, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in eſſe tamdiu permanere, poſſint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res exiſtere; potuit *Sol* multo priùs in lucem emerſiſſe; poſſit jam ille, vel alius talis ſpatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem exiſtentiam, at capacitatem tantùm ſeu poſſibilitatem denotat permanentis exiſtentiæ; ſicut ſpatium capacitatem deſignat magnitudinis intercedentis. Sed mirum, ingeres, ſecluſo motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimè dico quoad abſolutam, & intrinſecam naturam ſuam; haud magìs quàm quietem; à neutro temporis quantitas in ſe dependet; ſeu currant res, ſeu ſtent; ſeu dormiamus nos, ſive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge ſtellas omnes ab incunabulis ſuis fixas perſtitiſſe; nihil indè quicquam tempori deceſſiſſet; tamdiu quies iſta perduràſſet, quamdiu motus hic effluxit. Prius, poſterius, ſimul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo ſtatu fuiſſet in ſe, potuiſſet à mente magìs perfecta apprehendi. Sed prout ipſæ magnitudines ſunt abſolutè quantæ, independenter ab omni menſuræ reſpectu, etſi nos ipſarum quantitates niſi menſuras applicando percipere nequeamus; ità per ſe tempus quantum eſt, etſi quo temporis quantitas a nobis dignoſcatur, advocandum ſit motûs ſubſidium, ceu menſuræ quâ temporum quantitates æſtimemus, & inter ſe conferamus; adeóque tempus ut menſurabile motum connotat, nec enim, ſi res omnes immotæ perſtarent, ullo pacto quantum effluxiſſet temporis poſſemus internoſcere; rerum ætas indiſcreta nobis, & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at ſtupore continuo defixi ceu ſtipites conſiſteremus aut ſaxa. Nihil enim animadvertimus niſi quatenus aliqua mutatio ſenſum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio noſtram conſcientiam laceſſit, ac excitat. Ex motûs forinſecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extenſione, vel intenſione diverſos rerum gradus & quantitates æſtimamus. Ità motûs quantitas, in quantum a nobis obſervari poteſt, à motûs extenſione dependet;

Nec per ſe quenquam tempus ſentire fatendum eſt
Semotum ab rerum motu placidáque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philoſophus ipſe*; Ὅταν γὰρ αὐτοὶ μηδὲν
Phyſ. IV. 16. μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à ſomno excitatis quantum temporis interceſſit; at non hinc rectè colligitur, φανερὸν ὅτι οὐκ ἔστιν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non perſenſiſcimus, ergò non eſt, illatio fallax, & fallax ſomnus, qui fecit ut nos duo ſemota temporis inſtantia connecteremus. interim veriſſimum illud; ὅση ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitiſſe; neque quum tantum tempus dicimus, aliud conſuevimus intelligere, quàm tantum motum intercedere potuiſſe, cujus ſcilicet extenſioni continuò ſucceſſivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo ſemper æquali, non per vices nunc ſegniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admiſsâ ſiquidem illâ diſparitate nullam omninò computationem, aut dimenſionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoſcendæque temporis quantitati cenſeatur accommodatus, at is præſertim qui ſummè ſimplex & uniformis æquabili ſemper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum eſt, quod ſaltem quoad motûs ſui periodos æqualem conſtanter impetum ſervat; & per æquale ſpatium decurrit. Et ad communem quidem uſum accipiendus eſt ejuſmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & ſenſus omnium incurrens, qualis eſt motus ſyderum, imprimìs *Solis & Lunæ*, mirificè ſibi per omnia conſtans, & orbi terrarum conſpicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ ſuffragio deputatus, at divino Creatoris conſilio aptus natus eſt huic uſui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cœli,*
Gen. 1. 14. *& dividant diem ac noctem, & ſint in ſigna, & tempora, & dies, & annos.* At quomodò, dices, cognoſcetur *æquabili ſolem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æquitemporaneum eſſe?* Reſpondeo non aliter hoc (excipiendo quòd à divino teſtimonio colligatur) nobis innoteſcere, quàm cum aliis æquabilibus motibus ipſum ſolis motum contendendo. Si nempe deprehendatur ſolis motus in horologio ſolari (quod ſpatiorum à ſole in circulis æquatori parallelis percurſorum penè certò ac exquiſitè quantitates indicat)

indicat) cùm organi cujusvis horodeictici, satìs accuratè constructi, motibus consentire. Talis enim machina è fabrica sua comparata est, secundum motûs sui repetitiones succedaneas, æqualiter moveri; *Clepsydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ destinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem suam, & figuram, vímque descendendi prorsus eadem manet; nec non vasculum continens, & meatus ipsam transmittens haud omnino variantur, tantillo saltem tempore, pérque temperiem aëris consimilem, nec ideò causa subest ulla, cur non æquales in singulis effluxibus motus obire concedatur; ergò si compertum sit, Solares motus, seu quoad integras periodos, seu quoad partes ipsarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquisitè congruere, meritò pronunciandum est, eos prorsus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo discursu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cælestia corpora non esse, ex parte rei propriéque loquendo, primarias & originales temporis mensuras; ast illos potiùs motus, qui prope nos sensibus obversantur, & experimentis subjacent nostris, cùm horum ope cælestium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipse Sol temporis idoneus judex, aut testis αὐτόπτης est, nisi quatenus horariæ machinæ suffragio veracitatem suam adtestatur. Nec sanè, quod obiter interpono, potest ullo pacto sciri num periodi syderum ante multa secula transcursæ nostri seculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo scilicet asserat certò *Methuselam* illum qui tantùm non mille vitæ transegit annos, eo fuisse reverà μακροβιώτερον, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, si Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citiùs periodos suas evolverat? Quid si tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipsa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum nostri temporis instrumentis comparata fidem suam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, existimâsse dicitur Solem initio dies longè prolixiores effecisse. Sed minùs id rationi consentaneum videtur, quia tales motus vertiginosi sensim elanguescere potiùs solent, quàm invalescere. Verum obiter hæc, & vix seriò; revertamur in orbitam. Temporis (seu permanentiæ rerum in suo esse, statu, motúve) quantitas, ut dictum est, à motu quolibet dignoscitur, bene notorio, æquabili, (seu quoad partes ad hoc adhibitas sibi constanter æquali ac simili) dein secundariò è quibusvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correspondent, è cælestibus imprimìs, Solis potissimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora sint, in quibus eadem clepsydra semel ac iterum, vel æquè multis visibus exhauritur; aut in quibus

eadem ſydera periodos eaſdem, aut ejuſdem periodi partes æquales abſolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus ſimiliter, ſeu proportionaliter inæquales periodi conſumuntur. Neque quiſquam objiciat tempus communiter haberi pro menſura motûs, & conſequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adſumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideò temporis quantitatem è motu, ſed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obſtat quo minùs tempus & motus hæc ſibi mutuò præſtent officia. Sanè veluti ſpatium ex aliqua primùm magnitudine metimur, & quantum ſit diſcimus, è ſpatio poſteà reliquas ei congruas magnitudines æſtimamus; ità tempus primò taxamus è motu quodam, poſteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil eſt aliud quàm mediante tempore motus alios cum aliis comparare; ſicut & mediante ſpatio magnitudinum inter ſe rationes inveſtigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quàm ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum ſimul decurſorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Ariſtoteles:* οὐ μόνον (inquit) τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ
Phyſ. IV. 18. καὶ τῇ κινήσει τὸν χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὑπ' ἀλλήλων. Porrò, quia tempus, ut oſtenſum, eſt quantum uniformiter extenſum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus reſpectivis, ſeu ſpatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione reſpondent, poſſit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræſentari, hoc eſt menti noſtræ ſeu phantaſiæ proponi; per ſimpliciſſimas præſertim, quales ſunt linea recta, & circularis; quibuſcum etiam & tempore ſimilitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino ſimilares, rationi conſentaneum eſt ipſum velut unicâ dimenſione præditum quantum conſiderare; ipſum enim velut ex ſimplici ſupervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quaſi continuo fluxu conſtitutum imaginamur, & ſolam proinde longitudinem ei ſolemus attribuere; nec ejus quantitatem aliàs quàm ex lineæ decurſæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti cenſetur veſtigium, à puncto habens quòd aliquatenus diviſibilis ſit, à motu verò quòd uno modo, ſecundum longitudinem, dividi poſſit; ità tempus velut inſtantis continuò labentis veſtigium concipiatur, ab inſtante nonnullam indiviſibilitatem habens, à ſucceſſivo fluxu quòd eatenus diſpertiri queat. Et ſicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum conſequente, ità temporis quantitas ab unica conſectatur velut in longum

exporrecta successione; quam spatii decursi longitudo demonstrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam semper designabimus; arbitrariè quidem initio sumptam & expositam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis instantibus respectivis justè respondebunt, & iis appositè repræsentandis inservient. His de tempore prælibatis ad considerandam vim motûs effectivam procedimus, quæ sanè (quæcunque sit ejus natura, vel undicunque procedat, nam ista *Physicis* disquirenda relinquimus) merito quoque seu quantum quid concipitur, & sicut alia quanta computo subjicitur. Etenim experientiâ compertissimum est, sæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, seu majus eodem tempore spatium conficere. Nec aliunde potest hoc procedere, quàm à majori vi, seu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujúsque gratiâ velocius dicitur. Et quia perspicuum est nil impedire, quin secundum omnimodas proportiones contingat hic spatiorum unà peractorum excessus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaslibet (quas & sicuti partes cujuscunque qualitatis intensivas succinctæ distinctionis ergò gradus appellare licet, & consuetum est) in partes, inquam, quaslibet infinitas, aut indefinitas divisibilis concipiatur; quas inter se nectens, & à se dirimens communis terminus, vel (juxta suppositionem quòd quanta constant ex infinitis atomis) pars absolutè minima dicatur quies, hoc est summa tarditas, aut infima velocitas; è cujus succrescentia, vel intensione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appositione, vel motu, tempus ex instantium successione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem absolutè considerando, quo vis hujusce quantitas menti seu phantasiæ rectè proponatur, sufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc est talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibétque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) simplicitatis adeò perspicuitatísque causâ cuilibet ejus repræsentando gradui recta linea cumprimìs accuratè quadrat. Ità quidem in se generatim & absoluta spectata vis ista tempus non implicat, eóque secluso concipi potest (in quolibet enim temporis instanti, pérque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æstimio Mathematico subdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum spatio tempus adsignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac discernitur definitur idcircò velocitas potentia, quâ mobile spatium aliquod in aliquo tempore pertransire potest. Uude consectatur singularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimò ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant ampliùs exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam utì nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ità perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt; cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hìc mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis instantia prorsus æqualia sint inter se, spatialium longitudinum ratio à sola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut similis (quod nisi pro verissimo sumatur, haud ullo modo mensurari possit velocitas; nam à sola spatiorum eodem tempore decursorum (vel eodem instanti) proportione velocitatum inter se collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius respectu denominatur tanta) similiter si per omnia temporis cujusvis momenta qui conveniunt ipsis velocitatis gradus assignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibusvis decursorum spatiorum partes respectivæ, hoc est iisdem temporibus respondentes particulæ, justè proportionantur, adeóque quantum è gradibus istis constans repræsentans magnitudo spatium quoque decursum repræsentare possit; quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractæ proportionem inter se servant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabilissimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam aptissimè repræsentetur, & qui in singulis temporis instantibus habentur alii ac alii, sibimet æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut priùs etiam insinuatum est, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus singula temporis momenta alii ac alii permeent, independentèr à se invicem ac impermixtè; itaque si per lineæ tempus repræsentantis omnia puncta trajiciantur rectæ sic dispositæ, ut altera nulla nulli alteri coïncidat, hoc est in situ parallelo; quæ resultat hinc superficies plana (pro quantitate temporis, & positorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactissimè referet; cujus superficiei partes cùm respectivis (ut prædictum) spatii peracti partibus proportionales sint, poterit id spatio quoque repræsentando commodissimè adaptari. Ista verò superficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel spatii repræsentativa. Neque quenquam afficiat, nam submovenda nobis hæc remora, quod diximus in singulis temporis instantibus longitudinem aliquam confici, quasi dari posse motum instantaneum affirmarem. Nam posito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis; quòd si lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, sibimet æquinumeris, necessariò sequitur linearum puncta, juxta similem cum ipsis proportionem inæqualia fore, adeóque per longitudines in æquitemporaneis momentis decursas duntaxat intelligenda sunt ejusmodi inæqualia puncta, è quibus tota decursa longitudo quasi conflatur. Sin hoc absonum cuipiam videatur, & nullo sensu motus admittatur in-

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat; aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem priùs expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ità ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eique parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & viciſſim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contráque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum; vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum, nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioqui cùm

Fig. 1.

ſin-

ſingillatim ſpectantur; nihil refert quinam angulus ſtatuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ poſuimus ſponte conſectantur; ut nullam aliam demonſtrationem requirere videantur. Et ſanè quoad omnes Mathematicæ σκέψει ſubditas (hoc eſt utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perſpicere, tum ſummo eadem compendio demonſtrare poterit, quiſquis contemplationi ſuæ ſubjecta cujuſcunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd ſi porrò velocitatis gradus continuò per ſingula temporis inſtantia ſupponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, ſeu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; conſimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis ſuperficiem æqualiter à puncto creſcentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè paſſu decreſcentem, exhiberi; ſimpliciſſimè verò, & optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum A E Y, in quo crus A E tempus denotat; ejúſque punctis applicatæ lineæ parallelæ B Y, C Y, D Y, E Y gradus velocitatis ſingulis inſtantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ E Y repræſentatum æqualiter increſcentes; vel ab eadem E Y retrò ad punctum A quietis repræſentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona A B Y, A C Y, A D Y, A E Y per reſpectiva ab initio tempora decurſis ſpatiis repræſentandis inſervient. Et conſequenter, ſi velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum ſupponatur augeri, vel diminui, repræſentabitur tam aggregata velocitas, quàm ſpatium ei reſpondens à figura quadrangula Trapezia, qualis eſt CYYE, in figura priùs adhibita. Hinc, non ſecùs quàm in præcedentibus, hujuſmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ faciliмè deprehendentur, atque demonſtrabuntur; cujuſmodi ſunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale ſpatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipſum motum uniformem, modò velocitas hujus ſubdupla ſit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd ſpatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, ſeſe habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diverſos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis tranſacta ſpatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et ſimilia talia vel his connexa, vel indè conſequentia, quæ triangulis conveniunt inter ſe quoad ſuas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex poſitis haud difficilè perſpiciantur, ac demonſtrentur.

Fig. 1.

ſtrentur. Porrò, non abſimiliter ſi velocitatis gradus continuâ per ſingula temporis inſtantia ſucceſſione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, creſcere concipiantur, aut decreſcere juxta progreſſionem numerorum quadraticorum repræſentatur tum optimè velocitas aggregata, ſicut & ſpatium hujuſmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis eſt A E X, cujus vertex A quietem (ſeu motûs ac temporis initium) tangens A E tempus definitum, linea B X primum velocitatis accreſcentis gradum (qui ſe habet ut 1.) proxima C X ſecundum gradum (habentem ſe ut 4.) ſubſequens D X (qui ſe habet ut 9.) & ità porrò uſque ad ultimum E X: Id quod ex notiſſima parabolæ proprietate manifeſtum eſt. Eodem planè modo quivis ſuppoſiti velocitatis gradus, utcunque creſcentis aut decreſcentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræſentatricem rectam applicatas certiſſimo, commodiſſimòque modo deſignari poſſunt, aſſervatâ quam quis adſignare voluerit proportione; ſic ut inde cognitâ ſpatii repræſentantis dimenſione, ſpatii per motum confecti quantitas faciliùs innoteſcat; & reciprocè, cognitâ ſpatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoſcendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem poſthac dicendorum intellectui neceſſaria, totíque motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia viſum eſt paullo fuſiùs expoſita præmittere. Quà perfunctus operâ pedem figo.

Fig. 2.

LECT. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggressi modos considerare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm verò soleant *Mathematici* diversimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines resultant, motus adsumere ceu possibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus istæ motuum differentiæ scaturiunt, modum lationis ipsum, & quantitatem vis motivæ; quorum posteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati sumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas assumunt ipsas prosequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inservire possunt ostendemus. Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem à concursu distinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera sunt, *φορὰ*, & *περιφορὰ*, progressio, & circumlatio. Sub progressivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) respicit, cui velut innectitur, ac affigitur; seu directus iste motus sit, seu reflexus, seu refractus; sive callem certum persequatur, sive inconstanter desultet, divagetur, exorbitet. Quia verò penitus irregularium in arte nulla ratio potest haberi, sufficit *Mathematicis* supponere magnitudinem quamcunque progredi posse juxta designatam quamlibet orbitam; ut *v. g.* Quòd punctum *in linea recta, circulari, elliptica, spirali, vel alia quavis præstituta queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc est maximi, frequentissimíque pro magnitudinibus efformandis usûs, circa hujusmodi motus quas *Mathematici* præstruunt hypotheses, sunt hæ: Quòd punctum à præfixo termino in linea recta quousque libuerit adsignare directè progredi queat, quali motu perspicuum est lineam rectam describi:

describi: Quòd linea recta per alterius cujusvis lineæ longitudinem ità procedere possit, ut situm intereà parallelum perpetuò servet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sanè duo motus sibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies; quales sunt in plano *Superficies parallelogrammæ* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ità dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismaticæ, Cylindricæque*, tum quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui insistens recta A B per ipsam B C feratur, sibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipsi D C ad A B parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet assumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam describere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per easdem respectivè rectas A B interceptis (hoc est eodem tempore à puncto B decursis) æquantur. Neque minùs patet, si vice versâ recta B C per ipsam B A feratur, eandem superficiem delineari; omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas respectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accommodatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano insistat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, sibimet æquidistans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipsam A B primò positam parallelæ congruerit; describetur hoc motu figura quoque plano (latiore significatu) parallelogramma; quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi parallela sunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hìc singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas describent *directrici* B C similes & æquales; cùm integras, tum iisdem parallelis A B interceptas partes; si enim duo

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes EE subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentiùs & fusiùs disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quòd si vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singula rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ BC parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, καμπυλῶν γραμμῶν nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix fuerit linea circularis*, aut *elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directrici lineas; æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelas deportari. Quomodò singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis

Fig. 5.

Fig. 6.

* 10. XI. Elem.

rectæ

rectæ AB partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonstratum est; unde si superficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam seu genetricem, seu directricem (quam ubique sitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo secetur, sectio communis duabus rectis parallelis constabit æqualibus inter se. De Superficiebus autem ità progenitis observatu dignum est (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, sed & generales nonnullas ipsarum affectiones è diversis resultantes generandi modis insinuare propositum est nobis) quòd si linea directrix recta sit (ut in figura per literam Z discriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ respectivis directricis lineæ partibus semper proportionales sunt (superficies nempe BCCB respectivis rectis BB:) At si linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non semper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at saltem accidet hoc, cùm recta genetrix AB æqualiter ad curvam BC ubique, vel secundum omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuscunque, laxè vel strictè dicti, recti superficie; quia tum recta

Fig. 6. genetrix omnibus curvæ punctis (hoc est omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, sive subtensis rectis est perpendicularis.) Verum si, in exemplum, curva BC ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt necessariò superficies ABBA peripheriis æqualibus BB insistentes inter se pares, quia (præterquam in casu prædicto cylindri recti) rectæ AB ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum subtensis BB inæquales efficiunt. E qua re pendet *insuperabilis illa difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas superficies conantur dimetiri, seu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliisve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique consimili pacto superficiem quamvis planam directo motu sibi parallelo progredi, scilicet ut prædicto modo, singula ipsius puncta lineas rectas describant, inter se pares, ac parallelas; vel ut ejus singulæ rectæ (id quod indè consectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujusmodi motu describuntur prismatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipsa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúsque simili jure possunt adaptari, quæ Superficiebus istis ostendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipsorum, & ipsa corpora lateribus suis (seu directricis rectæ partibus respectivis) proportionantur. Quòd & si definita hujusmodi corpora

planis

planis laterum alicui parallelis ſecentur, communes ſectiones erunt *Parallelogramma* (quale eſt E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Priſmaticis ac Cylindricis ſtrictè dictis generatim enunciantur aut probantur uſpiam*, quòd ea pleraque juſtam analogiam obſervando, univerſis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progreſſivo motu quidpiam ſuccurrit adjiciendum; quædam enim δυσδιήγητα conſultò videntur reticenda. Porrò ſimplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Matheſis*, eſt *circumlatio*, *ſeu motus converſivus*; qui tum ſcilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum conſiſtit, dum ei velut innodata ac adſtricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis aſſignatam directionem, circumagitur. Cujuſmodi motûs generaliſſima proprietas eſt, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano tranſversè moventur, circulares ſingula peripherias deſcribant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum tranſeunte plano moventur parallelas, ſeu concentricas, & ſimiles inter ſe; quæ verò in diverſis planis ſimiles, aut diſſimiles, prout hypotheſium exigit arbitraria diverſitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis eſt circumlatio, cùm ſingula mobilis puncta circulares unius ejuſdem circuli peripherias deſcribunt, hoc eſt cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipſa natura ſponte concipit atque proſequitur, cùm nè rectos ſuos quos præſertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appenſorum motibus videre eſt; imò cùm objectâ quâvis reſiſtentiâ non ſatìs facilè recto tramiti valet inhærere; ſicut in *rotarum*, & *vorticum*, & *turbinum*, & *in ipſorum fortaſſe ſyderum*, *motibus adparet*. Verùm hujuſmodi motuum generalem indolem haud ità promptum eſt verbis explicare. Præſtat ipſas quas accipiunt præcipuas hypotheſes percenſere. Aſſumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipſa fixum poſſe circumferri; cujuſmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias deſcribere; ſingulas ab uno quovis deſcriptas ſingulis ab altero quolibet ſimul eodem tempore deſcriptis parallelas, & ſimiles. Ut ſi linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, ſingula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B ſibi parallelas, & ſimiles omnes (iiſdem nimirum, aut æqualibus angulis ſubtenſas, quorum commune centrum, aut vertex C) deſcribent. Hoc autem modo conſtat procreari circulos, & ſectorum circulares areas (quales ACA, B C B,) ſed & annulos planos; qualis eſt is qui reſtat, ſi è circulo Fig. 7.

D majore

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua genesi colligitur circulorum, & sectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac similibus, constare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum ineundo circularis areæ talis qualis dimensio quam facillimè reperitur; id quod non est hujus temporis ulterius exponere. Quinetiam supponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protensam, uno manente fixo ipsius puncto circa designatam quamvis in alio plano constitutam lineam, curvam aut è rectis compositam, revolvi, sic ut ei nempe lineæ semper insistat, vel eam quasi lambat, aut perstringat.

Fig. 8. Sit, exempli causâ, linea recta A B indefinitè protensa, & in ea fixum punctum V; & per V semper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ita quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujusmodi motu producetur curva Superficies (è planis saltem composita, quam & generali ratione, post *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem si linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; sin circularis fuerit, aut conicarum sectionum aliqua, Superficies evadet strictè *conica*; sin alterius generis aliqua, conica saltem extenso latiùs significatu dicatur; & à quibusdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas est, ex ipsa generatione manifesta, quòd si per fixum punctum V plano secetur, communis plani cum ipsa sectio erit angulus rectilineus. Nam si planum ipsam secans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipsam non secaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano secante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos transit, ipsísque proinde coincidit. In hujusmodi verò motu posito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (seu vertice) ad directricem lineam B C ductæ sunt inæquales inter se, satìs liquet lineam B C non à lineà B delineari, vel perambulari, quia

Fig. 8. lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) sibi nequeunt congruere; adeóque punctum B progrediens supra, vel infra puncta B, E, C cadet, ut nec eâdem inæqualitate suppositâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu suo lineam describet lineæ directrici B C similem (quare linea V B supponitur indefinitè protensa) at verò si lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci possunt (quas Superficiei propositæ latera nuncupemus licet) proportionaliter secentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo sita est B C, parallelo) divi-

sionum

sionum puncta lineam constituent, saltem ad lineam consistent, ipsi BC similem. Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, sint communes plani VBD cum planis BC, GH sectiones rectæ BD, GH; hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iisdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergò anguli BDE, GKL sunt æquales. Item se habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis est illi, quam habet VD ad VK (similia quippe sunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD.DE :: GK.KL. ergò omnes subtensæ in GH proportionales sunt subtensis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ sibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ sibi adjacent in altera. Ergò secundum superiùs insinuata lineas BC, GH similes esse constat. || Hinc etiam patet lineas curvas similes BC, GH eandem ad se proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta sita, latera VB, VG. Quum enim subtensarum iisdem angulis inclusarum (ut BD, GK, vel DE, KL) singulæ rationes æquales sint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc est tota BC) ad omnes consequentes conjunctas (hoc est totam GH) se habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum superficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ scilicet à parallelis ad BC planis, à vertice desumptæ, quibuscunque lateribus iisdem inclusæ partes ipsarum sint inter se similes; ut puta Superficies BVC, GVH; & BVD, GVK. (Quod ex generali similitudinis doctrina posthac explicanda luculentiùs apparere poterit; interim ex similitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúsque consimili Superficierum generatione satìs elucescit; saltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium similitudine satìs constat; siquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies composita censeatur.) Unde similium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diversis lateribus Superficies, eas inter se comparando, notandum est quòd basibus suis, seu directricis lineæ respectivis partibus non semper proportionales sunt; at saltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera sunt æqualia inter se, adeóque cùm linea directrix est peripheria circuli; quo casu producta Superficies erit conica Superficies strictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quòd si directrix BC supponatur e. g. peripheria circularis, lateráque sibimet inæqualia, si

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torsit, *qui dimetiendæ coni scaleni superficiei incubuerunt.* || Ex his consectatur quòd possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ità ut ejus singula quæque puncta parallelos lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta V B ita sensim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipsi B C similem describet. Quinimò si consimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu sitúque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ùt ejus singula quæque puncta lineas rectas describant, secum omnes in punctum V concurrentes; hoc est ità ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque V; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, si *linea directrix* in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu base, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia symptomata satìs è dictis elucescunt. Nempe quòd à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similésque bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit supposito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu cruris

unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur; eóque pacto *cùm integræ cum suis Curvis Superficiebus Solidæ magnitudines innumeræ, tum ipsarum portiones, frusta, tubi, annuli procreantur.* Cujusmodi motûs hæc præcipua proprietas est, quòd singula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta sit revolutio, seu mobile denuo primum in situm restituatur, at similes utcunque sibi mutuo, quæ simul describuntur) quarum omnia Centra sunt in dicto axe, radii verò sunt rectæ ab ipsis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili sitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet & verisimilitudinis causâ non illibenter usurpo) circularibus, inquam peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquáque quæ sunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii sunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd si revolutio tantum eousque continuatur, donec V A D sit in situ V $\alpha\delta$, constabit *effecta Superficies* ex arcubus A α, B β, C γ, D δ, similibus inter se eodem modo si planum V D Z circa axem V K revolvatur, posito quòd integra peragatur conversio, producetur Solidum quasi constans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y, quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; positóque quod circulatio desistit in situ δv K, constituetur Solidum è Sectoribus A Z α, B Z β, C Z γ, & reliquis inter se similibus. Cæterúm prætermittenda non est animadversio quædam perquam utilis, & necessaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam & infallibilem.* Objicit huic methodo non semel, in pereruditio suo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello*, *doctissimus A. Tacquetus*, eóque se putat illam destruere, quòd per eam inventæ *conorum, & sphærarum superficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimensioni non respondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta transire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* componitur.

Fig. 9.

Fig. 10, 11, 12.

| K

ponitur ipsum *triangulum rectangulum* V K D; & è circulis ad quas ceu radios descriptis ipse *conus* conflatur. Ergò, disputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adversari; methodúsque proinde fallax est. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* constant computatione diversam instituendam esse rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *planæ superficies* constant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam constituentium è revolutione prognatam lineæ V D censeri debet è multitudine punctorum, quæ sunt in ipsa
Fig. 10, 11, 12. linea genetrice V D; quippe cùm per ea singula puncta tales peripheriæ transeant, nec plures transire queant; quicunque sit axis, seu longius distans, seu propiùs adjacens; axis enim solummodò, pro longiore vel propiore distantia positionéque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K supponitur constare, planorúmque quibus Solidum D V Y constat, è numero taxanda est punctorum in axe V K; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipsi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci possunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod observando *discrimen* (sedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujusmodi rotatu genitarum Superficierum facillimo, reor, omnium quos rei natura subministrat modo perquiremus.* Illum commonstrabo. Pro reperienda v. g. dimensione *curvæ superficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipsa V D in directum extendi, ità scilicet ut ei exæquetur recta V D; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipsi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; singulæ singulis, puta A X ipsi A Y, & C X ipsi C Y, ac ità continuò. Erit ex his parallelis rectis constitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ superficiei*; hujúsque partes illius partibus respectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipsarum respectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui; spatium ex his rectis constitutum (quæ sanè proportionali cum alteris serie procedunt) se habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujusvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde siquâ ratione deprehendi possit *Summa radiorum per omnia lineæ genetricis puncta transeuntium* (hoc est si *spatii V D Z dimensionem* reperire contigerit) eo statim innotescet *curvæ Superficiei dimensio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

plicentur rectæ A Z, B Z, C Z, D Z ad ipsam V D perpendiculares, & æquales singulæ singulis in cono circulorum radiis per easdem literas designatis; fiet autem in hoc casu *Spatium* V D Z triangulum, quia rectæ A Z, B Z, C Z æqualiter à se distantes æqualiter increscunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium est. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine V D & base D Z, dimensio in promptu est. Quod si fiat *ut circuli radius : Ad circumferentiam ipsius, ità triangulum V D Z ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propositæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæræ, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaslibet hoc modo natas) investigare licet. At mihi propositum est generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum genesin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iste modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) similes innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta se situ dispositæ taliter constituuntur, ut singulæ centrum suum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem subit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c, in *cylindris obliquis*, ínque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam consistunt; quæ propterea dicitur ipsorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* existunt. Sed cùm motus ità distortos natura non capiat (saltem juxta modum operandi simplicem quem nunc supponimus) & quia possunt hujusmodi magnitudines ut modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abstinebimus. Neque non de magnitudinum per motus simplices effectione sufficiet hactenus disseruisse. ||

LECT.

Lect. III.

Quomodo per *motus simplices progressivum*, & *conversivum effecta concipiantur magnitudines,* & *qualia generationes istas consequuntur symptomata* (nonnulla saltem præcipua) *conniti sumus exponere ad compositos nunc*, & *concurrentes*, *eidem proposito servientes*, *motus accingimur*; quorum in effectis discernendis velocitates, secundum quas simplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis consideranda sunt; quarum in generatione per motus simplices nulla prorsus habetur ratio. Per eundem enim motum simplicem seu velocior is sit, seu tardior eadem magnitudo, quamvìs non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejusdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvìs ut hæc fiant eò magìs aut minus expectandum sit, quo segnior aut citatior supponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compositos iisdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum specie, sed etiam quantitate diversæ magnitudines emergere solent, positione saltem perpetuò differentes. Ut si recta A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & simul punctum M in A B descendat uniformiter; vel simul recta A C parallelo quoque uniformi motu descendens ipsam A B promotam intersecet in M; ex ejusmodi motuum compositione vel concursu producetur recta linea A M. Quòd si eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C secet ipsam A B in μ, describetur hoc motu alia recta A μ à priore A M positione diversa. Sin verò, manente rursus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi substituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejusmodi compositione, vel concursu fiet linea parabolica

Fig. 13.

parabolica A M X vel etiam aliter posita A μ Y (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quòd si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypothesis*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quòd eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla*, *quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodéque satis explicetur; ita nimirum Fig. 14. ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu rotetur Fig. 15. uniformi; et simul recta AC per AB parallelωs, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetùr. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelωs ad primò positam AB; vel ex puucto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

motuum compositionem ab ipsorum concursu secerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modò faciliús explicatur. Verum ad illos distinctius exponendos accedo. De compositione primum. Cùm autem motus duobus modis compositus intelligi possit; vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de posteriore nos dissertamus; quem fortè non meliùs quàm prænobilis Philosophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Cartes.princ. II. 31, 32. "Etsi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum sibi proprium, quoniam ab unis tantùm corpori-"bus sibi contiguis, et quiescentibus recedere intelligitur, parti-"cipare tamen etiam potest et de aliis innumeris; si nempe sit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut si quis am-"bulans in navi *horologium in* pera gestet, ejus horologii rotu-"læ unico tantùm motu sibi proprio movebuntur; sed participa-"bunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam "cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus ad-"junctæ ipsi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipsi terræ, "siquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera e-"runt in rotulis istis, sed quia non facilè tam multi simul intel-"ligi, nec etiam omnes agnosci possunt, sufficiet unicum illum, "qui proprius est cujusque corporis in ipso considerare. Ac præ-"tereà ille unicus cujusque corporis motus, qui ei proprius est, "instar plurium potest considerari; ut cùm in rotis curruum du-"os diversos distinguimus, unum scilicet circa ipsarum axem, et "alium rectum secundum longitudinem viæ per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non sint reverà distincti patet ex eo, "quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tan-"tùm aliquam lineam describat. Nec refert quòd ista linea sæpe sit "valde contorta, et ideò à pluribus diversis motibus genita vi-"deatur, quia possumus imaginari eodem modo quamcunque li-"neam etiam rectam, quæ omnium simplicissima est, ex infini-"tis diversis motibus ortam esse. Ut si linea A B feratur versus

Fig. 16. "C D, et eodem tempore punctum A feratur versus B, linea "recta A D, quam hoc punctum A describet, non minus pende-"bit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm "linea curva, quæ à quovis rotæ puncto describitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis sæpe utile sit u-"num motum in plures partes hoc pacto distinguere ad facilio-"rem ejus perceptionem; absolutè tamen loquendo unus tantùm

in

« in unoquoque corpore est numerandus. Ita *Cartesius.* Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps est, ut ab eo quoad situm suum aliquatenus determinetur, iste motus hujus compositionem quasi pars ingreditur, ab exemplis posthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi possunt *Progressivi* cum *Progressivis*, *Progressivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi possunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire censum impossibile sit, illosque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile sit, exponere difficiliùs; nos præcipuos saltem aliquos, in usu magìs positos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis sunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præsertim illi quos qui constituunt simplices motus omnes vel nonnulli sunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Respublica requirit, ac exigit Ecclesia, sed artes etiam atque scientiæ vehementer affectant.* Recti motns (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum sibi non immeritò locum asserunt, ut simplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac usitati. Nec ulla sané magnitudinis est species (nulla linea, nulla superficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano constituta linea procreari potest è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis superficies è motu parallelo plani, et lineæ iu eo (lineæ scilicet alicujus è rectis modo jam insinuato motibus progenitæ) consequenter et linea quævis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. Corpus autem solidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è superficierum genitura resultat, et quatenus ab ipsis ità genitis terminatur, ac circumscribitur Sed quia *superficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Mathesis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam succurrit animadversione dignum quod de iis dicam, de linearum saltem in uno plano existentium, per rectos et parallelos motus generatione dispiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla est quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem specialis lineæ producendæ natura poscit; nec refert qualem, velocitatis respectu, motum uni tribuas, ad hujus modò

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e.g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (crescente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes easdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe si fuerit semper A B . A C : : B M . C μ . vel A B, M X : : A M, X μ (positâ scilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelos applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius B M (à puncto mobili decursæ in recta A Z) & ipsa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decursa à linea A Z) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipsis* si secus; & in his erit D una *diametrorum*, situm habens in linea A Z primò positâ, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin ità se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & B M & ipsa B M semper eandem cum quadrato ex A B proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in Z A primò posita à vertice A protensa versus partes aversas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuò rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y sit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate crescet æqualiter. Nec absimili modo quævis alia linea tali motûs compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujus-

Fig. 17.

modi

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis cauſâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum parallelifmum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

LECT. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorſum imprimìs methodi cauſâ repeto ſi recta A Z per rectam A Y ſibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis A Z poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per A Y ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia A B, A C ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ B M, C M ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur A B. A C :: B M. C M. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundò punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Notetur intereà, quòd brevitatis cauſâ motum parallelum uniformem rectæ A Z per A Y appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea A Z motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*, habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per A Y et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. I. Hoc

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe transversum uniformem, & descensivum continuò crescentem) progenita linea per omnes sui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipsa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ transeant B Z, C Z, D Z ad A Z parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta M N K. Et quia recta M N gignitur è motu composito transverso per B C (vel huic parallelam M G) & descendente per A Z, uniformi utroque; transversus autem per M G est prorsus idem cum transverso, quo linea proposita M N O describitur; patet velocitatem descendentis motûs uniformis rectam M N gignentis minorem esse velocitate, quam motus itidem descendens, lineam M N O describens, habet in N (etenim nisi motus hic velocior jam sit illo, cùm continuò crescere ponatur, in toto tempore descensus per G N illo tardior fuisset, adeóque nunquam eodem tempore spatium æquale transegisset, nec unà cum eo pertigisset ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increscens per tempus motûs uniformis C D continuatus (quo nempe gignitur linea N O) majus spatium emetitur, quàm uniformis motus descendens, quo M N. ad K protractus describitur, eodem tempore C D; (liquet enim eodem tempore à majore vi crescente majus spatium peragi, quàm à minore neutiquam crescente) quare linea H O major est quàm H K; adeóque tria puncta M, N, O non existunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibusvis lineæ M N O punctis conveniat, abunde patet eam esse nullibi rectam, sed per omnes sui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis descendentis, quo curvæ M N O subtensa quævis (ut M N) describitur, existente scilicet communi transverso motu uniformi quo ipsa, ejúsque arcus fiunt, minor est velocitate, quàm motus descensivus increscens habet ad communem utriusque terminum N.

III. Hujusce curvæ *subtensa* quælibet (ut M O) intra *suum arcum* (versus partes A Z) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam M N O.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8. Nam si sumatur in arcu M O punctum quodvis N, & connectantur rectæ M N, N O liquet totam M O intra rectas M N, N O jacere, & proinde intra curvam M N O. Tota verò, si producatur, extra lineam M N O cadit, quia nusquam alibi ei occurrit, utì mox ostensum.|| Hoc accidens de circulo speciatim demonstrat *Euclides*, *de sectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*.

IV. Patet

IV. Patet curvam propoſitam eſſe convexam, aut concavam ad eaſdem partes (convexam verſus partes ſuperiores vel exteriores AY, concavam introrſum, aut deorſum verſus AZZ) nam hoc ipſum, fore convexum aut concavum ad eaſdem partes, nil omnino deſignat aliud, quàm à nulla recta linea præterquam duobus punctis ſecari; nec aliò recidit, quam initio libri de ſphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad eaſdem partes cavæ definitio. Perſpicuum eſt v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO ſecans ei rurſus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, verſúſque partes AY recurvari; id quod modò demonſtratum eſt non poſſe contingere. Quapropter ipſa linea verſus eaſdem partes convexa eſt, ſeu concava.

V. Apertiſſimè conſtat lineas quaſvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propoſitam curvam ſecare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam deſcripta cenſetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto ſecat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat inſtans temporis durat in ſitu quovis uno, ſeu BZ; ſimúlque pertingit ipſam BZ, ac deſerit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta ſunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum eſt ipſam BZ in uno tantùm puncto curvam ſecare. || Hoc ipſum de parabola, & hiperbola ſpeciatim oſtendit *Apollonius*; de ſectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* I. 26. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non diſſimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propoſitam curvam attingere. || Quòd ſemel occurret (modò contineatur intra limites deſcenſûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò deſcendens, indefinito progreſſu, eam indefinitè protenſam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de ſectionibus conicis oſtendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ ſubtenſas rectas cum AZ & ei parallelis, ſi producantur, concurrere.

Quòd enim ſubtenſa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi ſcilicet ubi ipſa curvam ſecat, exinde manifeſtiſſimum eſt, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum deſcribitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum

larum æquidiſtat recta, pariter omnibus æquidiſtat, ut in elemento primo demonſtratur.

I. 22. Operæ pretium exiſtimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* ſpeciatim demonſtrare.

VIII. Simili modo patet rectas quaſcunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus. Iiſdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *ſectiones conicas*, uno

I. 24, 25. vel altero *Theoremate* demonſtravit *Apollonius*.

IX. Quinimò rectæ quævis ipſam AZ ſecantes (infra punctum A, ſupráque limitem, ſiquis erit, motûs deſcenſivi) curvam ſecabunt.

Cùm enim omnes ipſi AZ parallelas ſecent etiam infinitè productæ curvam ſecent oportet. *Hujuſmodi Symptomatis demonſtra-*

I. 27, 28. *tioni in ſectionibus conicis* laborioſam operam impendit *Apollonius*.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam AY, ipſi AZ parallelas (quas nempe propoſitæ curvæ ſinus verſos appellare fas erit minorem inter ſe rationem habere (minores cum majoribus comparando, ſeu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent reſpectivæ ipſius AY partes, iiſdem temporibus decurſæ (quas & curvæ propoſitæ ſinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe BM ad CN minorem rationem habet, quàm AB ad AC, vel BM ad CF; quia CN ⊏ CF. || Hoc de circulis, & aliis curvis ſpeciatim reperiatur paſſim oſtenſum.

Ad ſequentia notandum, quod ſi recta tranſverſim & parallelas mota retrogradè (à D puta verſus A per DA) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propoſitæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque ſemper ratione dictum punctum ab O aſcendens quoad velocitatem decreſcat, quâ ad ipſum O deſcendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus ſit, inversè tantum conſideratus.

XI. Supponatur rectam lineam TMS propoſitam curvam in puncto M tangere (ſic ut eam nempe non ſecet) occurrátque tangens hæc rectæ AZ in T, ducatúrque per M recta PMG ad AY parallela; dico velocitatem puncti deſcendentis, eóque motu curvam deſcribentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta TP deſcribetur uniformiter eodem tempore, quo recta AZ fertur

per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti descendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ se habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipsum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu descripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelus delatæ, altero puncti descendentis à T per TZ; & sit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva describitnr; cùm TZ est in situ KG, erit AZ in eodem; ergò cùm punctum à T descendens fuerit in K, erit punctum ab A descendens in curvæ cum KG intersectione O (nec enim, ut anteà deductum est, alibi recta K G curvam secat) est autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota versatur. Jam si punctum K ponatur supra contactum versus T, quoniam tum O G minor est quàm KG, liquet velocitatem puncti descendentis, quo curva describitur, in curvæ puncto O minorem esse velocitate motûs uniformis descendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa semper increscens eodem tempore (per GM repræsentato) minus spatium transigit, quàm hæc minimè crescens; ast eadem continuò perseverans; illa scilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero si punctum K infra contactum ad partes S existat, quoniam OG tum major est quàm KG, patet velocitatem puncti descendentis, quo curva fit, in puncto O majorem esse velocitate motûs uniformis itidem descendentis, quo tangens efficitur; quia motus iste, continuò decrescens eodem per GM tempore, majus peragit spatium OG, quàm hic minimè decrescens, at in eodem tenore persistens, conficit, ipsum nempe spatium KG. Ergò cùm velocitas curvam describentis puncti quovis in curvæ puncto supra contactum versus A minor sit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipso contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D. Fig. 20.

XII Hujus conversa, consimili discursu, rem breviùs exponendo, demonstretur. Nempe, si velocitas puncti descendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam T P describeret tempore PM vel AC (vel sit velocitas motûs descendentis ad M ad velocitatem motûs transversi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam sumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam versus partes AT velocitas ascendentis puncti, curvam efficientis, semper decrescit ab M ad O, illi verò ex hypothesi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decrescit ab M ad K, sitque tempus MG commune, erit spatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia versus alteras partes, velocitas descendentis, quo curva fit, increscit semper ab M versus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud crescit ab M ad K; idémque sit rursus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K supra curvam existere. Quare manifestum est omnia dictæ rectæ puncta extra curvam existere; & eam proinde curvam contingere: Q.E.D.

XIII. Ex hisce statim *consectatur, hujusmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & si fieri potest altera MX etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illâ scilicet, quæ puncti curvam describentis ad contactum M acquisitæ velocitati æquatur) describetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q.E.A. Ergò non tanget altera præter positam MT. || *Hanc speciatim de circulo demonstravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aspernandum, quòd eâdem operâ *propositiones de tangentibus inversæ demonstrantur.* Nempe si determinetur angulus PMT (vel alter quispiam quem recta positione data cum tangente facit ad punctum curvæ designatum) aut si determinetur quantitas rectæ PT (vel similis cujuspiam alterius à

Eucl. III. 16, 17. puncto in data positione recta designato per tangentem interceptæ)

Apoll. I. 32, 33, 34, 35, 36. eo tangens determinabitur. Et permutatim, si tangens situ determinetur, angulorum atque linearum ejusmodi quantitas indè dignoscetur. Adeóque parcetur operæ, qualem insumpserunt plerique tales propositiones inversas demonstrandi. Quod & eo magìs observatu dignum est, quia sæpe talium inversarum propositionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque facilius demonstratur. Cujus observationis, nisi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina.*

XIV. E dictis infertur puncti descendentis velocitates in duobus quibusvis designatis curvæ punctis ad se proportionem habere reciprocè

com-

compositam è rationibus applicatarum ab istis punctis ad rectam AZ (ipsi scilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad ista puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione subductæ.)

Nempe si duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipsius TP ad PM, & ipsius QN ad QX. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY se habet ut TP ad PM; & velocitas ista uniformis se habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus PP ad PM, & QN ad QX componetur Notetur à concursu tangentium ductâ FE ad AY parallelâ; fore TE, XE = TP . PM + QN . QX. Fig. 21.

XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem consequi *Problematis istius solutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quam optimè & ingeniosissimè reperisse. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipse *Galilæus* ad manum non est) propositâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod sublime reperire; è quo si grave cadat usque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipsa *propositam parabolam* describat (notetur, quod motus descensivus parabolam describens non è puncto sublimi, sed ab ipso puncto A censetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* suppositis insistendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, seu transversi, & æqualiter crescentis descensivi quorum è compositione descripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque sit crescentis descensivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; specialem illum de *parobola* casum in exemplum subjuncturi. || Reperiatur in recta AZ (quæ sanè curvæ diameter est) punctum aliquod, ut P, à quo si ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, sit intercepta TP æqualis ipsi PM; tum sumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum. Fig. 22.

Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile descendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam describendo (ponitur enim increscentis velocitatis motus utrobique prorsus idem) iste verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T descendens uniformi motu percurret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter

lata, pérque motum iſtum in curva deſcribenda cónſpirans, percurrit rectam P M. Cùm igitur ſint T P, P M ex conſtructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus ſimul peraguntur, æquales; etiam motus deſcenſivus in P, vel M æquabitur motui tranſverſo, curvam deſcribenti, hoc eſt motûs ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S eſt id ipſum, quod inveniri debuit, & abſolutum eſt
Fig. 22. propoſitum. | Exemplo ſit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & deſcenſivo pariter accelerato; tum punctum P ità facilè per *Analyſin* inveſtigatur. Sit recta R *data parabolæ rectum latus.* Eſt igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq = TPq$ (ex hypotheſi modi noſtri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate eſt $TPq = 4 APq$. Ergo eſt $R \times AP = 4 APq$. Adeóque $R = 4 AP$; vel $\frac{1}{4} R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem caſu puncta T, S coincidunt. Quòd ſi rurſus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate creſcendo deſcendant, adeóque motus ipſorum talis cum uniformi tranſverſo compoſitus *parabolam cubicam* deſcribat, & ſit R iſtius curvæ *parameter*, erit eo in caſu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujuſce curvæ proprietate eſt $Rq\,AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præſcripto eſt $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujuſmodi *parabola* tangentis intercepta ſemper triſecatur à vertice (nimirum ut ſit $AP = \frac{1}{3} TP$) eſt TP cub. $= 27 AP$ cub. Erit igitur $Rq\,AP = 27 AP$ cub. Adeóque $Rq = 27 APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis ſimili ratione procedentes aſſequemur propoſitum. Poſſent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propoſitiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, ſed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *ſpecimine* (quoad iſta) contentus; huc non niſi per tranſcurſum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana ſuperficies*, cujus ſingulæ quæque partes applicatis ad iſtam rectam parallelis interceptæ proportionales ſint rectis ad rectam A Y ſimpliciter diviſam applicatis (ad A Z nempe parallelis.) Hujuſce ſuperficiei ad parallelogrammum æquealtum, ſuper eadem baſe conſtitutum, proportio proportionem indicabit ipſarum AP; TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut

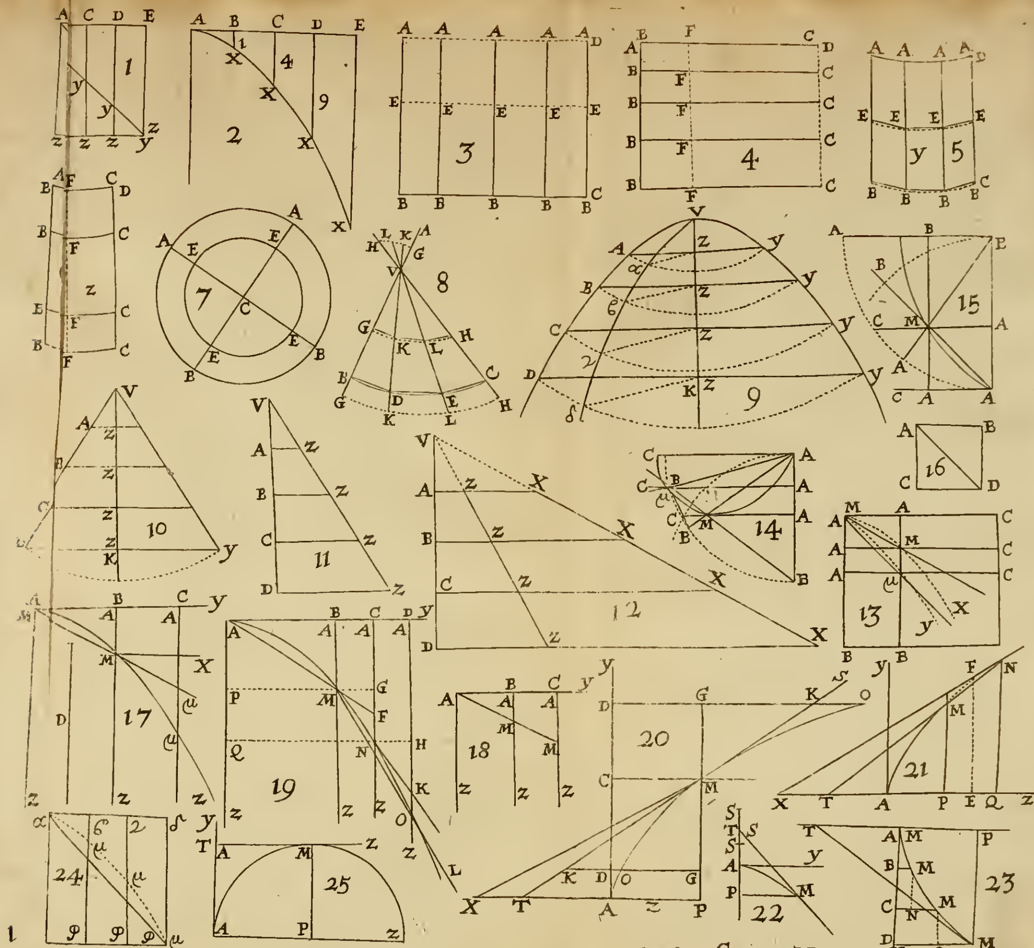
Fig. 23, 24.

Hæc posthàc γεωμετρικώτερον demonstrata habentur.

Ut si ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana superficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque divisâ AD punctis B, C, similitérque dicisâ rectâ $\alpha\delta$ punctis β, γ, fuerit ut BM ad CM ità superficies $\beta\alpha\mu$, ad superficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus universis taliter institutis contingat; *completo parallelogrammo $\alpha\delta\mu\varphi$, se habebit recta* AP *ad rectam* TP *ut superficies $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$.* Et enim si recta $\alpha\delta$ commune tempus designare concipiatur, quo recta AD motu æquabili, rectáque DM motu continuè accelerato transiguntur, recta $\delta\mu$ bene designabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum descendens in curvæ puncto M infimo; hoc est velocitatem quâ recta TP uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonstratum est.) *Parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$* optimè *Spatium* repræsentabit, quòd hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter describitur, hoc est ipsam rectam TP. Cùm igitur, ex hypothesis præstratæ con ditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam DM, vel AP, repræsentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP; cognitáque proinde modo quovis istâ proportione, simul hæc innotescet; & reciprocè. Exemplo res manifestior evadet uno, vel altero. Proposita curva sit *parabola quadratica*, seu in qua rectæ BM, CM se habent, ut quadrata ex AB, AC, hoc est ut quadrata ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$. Ergò si figura $\alpha\delta\mu$ sit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo supposito semper triangula $\beta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, hoc est rectis BM; CM. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\varphi\mu$ est subduplum, erit recta AP quoque rectæ TP subdupla; quod ità se habere demonstratum habetur in *conicis elementis*, & passim agnoscitur. Sit rursus curva AMM *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ BM, CM se habent ut cubi rectarum AB, AC, hoc est ut cubi rectarum $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$; & si *superficies $\alpha\delta\mu$ fuerit complementum semiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea $\alpha\beta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ cubis ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis ostenditur, & ex *Archimidea parabolæ dimensione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio proposito quàm rectissimè adaptetur *parabola quadratica*; cúmque constiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ subtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\varphi$; erit etiam juxta regulæ jam assignatæ præscriptum recta AP quoque subtripla rectæ TP. De qua conclusione satìs convenit inter *Geometras*.

XVII. Huic suppar modus dictas rectas A P, T P comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc est
Fig. 23, 24. ad ejus singula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam A D consimiliter divisam applicatarum differentiis proportionales, resultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandémque basin positum, rectarum A P, T P proportionem exhibebit. Ut si rectæ A D, $\alpha\delta$ similiter (in partes scilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis B M, N M, O M (quæ differentiæ sunt rectarum ad A D applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales sint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità A P ad T P. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad A D; puta *v. g.* D M æquetur omnibus seipsâ minorum differentiis (ipsis nempe B M, N M, O M) & trilineum $\alpha\delta\mu$ constituatur è rectis $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione crescentibus; ut & recta C M æquatur ipsis B M, N M; & ei respondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quasi conflatur è parallelis $\beta\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione crescentibus; & hoc semper eveniat; omnino patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\beta\mu$ rectis D M, C M, B M proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hìc rectas $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræsentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in respectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\beta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita respectiva temporis instantia; quibus (ut jam olim præmonitum) respondentia spatia B M, C M, D M proportionantur.

XVIII. E supradictis porrò consectatur, quòd si *Circulus*, *Ellipsis*, ejusmodíque curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas describens infinitam in recursûs puncto velocitatem habebit. Nempe si quadrans A F M ità generetur; quoniam
Fig. 25. tangens T M diametro A Z est parallela, nec illa proinde cum hac nisi ad infinitam distantiam convenit; ergò velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per A Y se habebit, ut infinita recta ad ipsam
II. *preced.* P M; unde velocitas ista ad M prorsus infinita sit oportet. Ità quidem quoad hujusmodi curvas; at quoad alias ad infinitum sensim continuatas (quales *parabolæ* & *hyperbolæ*) descendentis puncti velocitas in quovis designato curvæ puncto finita est. Verùm his omissis ad alias propositæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.


T: Cross sculpsit
Geo pag 38

Lect. V.

IN deducendis è propositâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diversa curvæ puncta, sibimet inæquales sunt; & minores sunt illi qui puncto A (seu vertici) propiores sunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ sint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipsi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipsa XN secabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifestum est autem cùm puncta H, N sint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH sese intersecare inter parallelas PH, QE; quare major est angulus externus QNX interno QET, hoc est angulo PMT: Q.E.D. Fig. 26.

II. Hinc *porismatis* loco habetur *tangentes se intersecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protensas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem esse*; (externum scilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quasvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quàm remotiores.

Cæterùm ista jam olim de *Sectionibus Conicis* ostenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* est videre

V. In figura præcedente (posito applicationis angulum TAY rectum esse, vel obtusum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem esse; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur subtensa MN, ducatúrque recta NR ad ZA parallela. Et quoniam angulus XPH non minor est recto, erit, eo major externus, NHP obtusus. Ergò recta NM major est quam NH. Itaque magis arcus, arcus NH major est quam ipsâ NH: Q.E.D.

Item, quoniam ang RNE ipsi XQE par haud minor est recto, erit RE $\sqsubset$ RN. quare MR + RE $\sqsubset$ MR + RN. hoc est ME $\sqsubset$ MR + RN. Est autem (ex *Archimedæis* assumptis) MR + RN $\sqsubset$ arc. MN. ergò magis est ME $\sqsubset$ arc. MN $\therefore$

VI. Perutilis est hæc propositio in *tangentium demonstrationibus expediendis*. Etenim hinc consectatur, si arcus MN indefinitè parvus ponatur, ejusce loco alterutram tangentis particulam ME, vel NH tutò substitui.

Speciminis hìc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & consimili modo descriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonstratione munitam.

Fig. 27. Recta AY sibi parallelè deportata quamcunque curvam ad easdem partes convexam aut cavam, APX perambulet uniformi motu (scilicet ut æquales curvæ partes æqualibus transigat temporibus) eodémque simul tempore punctum aliquod ab A per AY etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva AMZ; cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta MP ad AY parallela, curvam APX secans in P; pérque P ducatur recta PE curvam APX contingens; huic verò per M ducatur parallela MH; ínque hac sumatur punctum quodpiam R, & ducatur RS ad PM parallela; tum fiat ut curva AP ad rectam PM (hoc est ut unus motus uniformis ad alterum) ità MR ad RS; & connectatur MS. hæc curvam AMZ continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta ZX ad MP parallela, secans curvam APX in X, ejúsque tangentem in E; & huic parallelam MR in H; ipsámque demum MS in K. Sit autem primò punctum Z supra M versus A; unde recta PE $\sqsupset$ arc PX. adeóque PA . PE $\sqsubset$ arc PA . PX :: PM . PM — XZ :: PM . EH — XZ :: PM . ZH — EX $\sqsubset$ PM . ZH. quare permutatim erit PA . PM $\sqsubset$ PE . ZH. est autem PA : PM :: MR . RS :: MH . KH :: PE . HK. ergò PE . HK. $\sqsubset$ PE . ZH. quare HK $\sqsupset$ ZH. est autem punctum H extra curvam AZM; ob EZ $\sqsupset$ XZ $\sqsupset$ PM = EH. ergò palàm est punctum K extra curvam AZM existere. Sit verò secundò punctum

punctum Z infra punctum M; erit tum recta PE major arcu PX; unde arc PA. PE ⊐ arc PA. PX :: PM. XZ — PM :: PM. XZ — EH :: PM. XE + XZ ⊐ PM. HZ. & vicissim PA. PM ⊐ PE. HZ. Verum ut priùs) est PA. PM :: PE. HK. ergò PE. HK ⊐ PE. HZ; propterreáque HK ⊏ HZ; rursus itaque liquet Punctum K extra curvam existere. Tota proinde recta MKZ extra curvam versatur; & eam tangit ad M: Q. E. D. In transcursu hoc. ad alias curvæ nostræ passiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipsi MT) parallela ducatur quæpiam EF (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T sumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva sumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergò recta EF eidem occurret; at curvam priùs transiliat oportet. ergò liquet Propositum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, si punctum assumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectumE F curvæ bis occursuram, tam supra quàm infra contactum M.

Operosè connisus est *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* ostendere. *Con. I. 27, 28.*

Cæterùm ad penitus determinandos occursuum locos *Specialis modus seu ratio motuum descendentis atq; transversi cognosci debet*; tunc eos *Analysis* statim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (HM, KN) ad curvam propositam æqualiter inclinentur (hoc est æquales cum ejus ad occursus tangentibus (puta cum ipsis MT, NX) angulos efficiant) hæ extrorsum divergent, seu ad partes EF productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur subtensa NM; hæc utiq; secundum antedicta cum ipsa AZ conveniet, puta ad O. Est ergò ang. OMH ⊐ (ang. TMH = ang. XNK ⊐) ang. ONK. ergo ang. HMN + MNK ⊏ 2 rect. ergò rectæ HM, KN concurrunt ad partes EF. Limitandum est hoc, intelligendo pares angulos HMA, KNA ad easdem partes versari; seu alterum alteri fore externum interno. alias cotnra eveniet.

X. Si fuerit recta HM *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tangenti MT) & in hac sumatur quæpiam definita HM; erit HM minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci possunt ad curvam. Fig. 30. *Apoll. V. 3[?] &c.*

Ducatur enim quævis H O ; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet H R majorem esse quàm H M ; multóq; magìs esse H O $\sqsubset$ H M,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si H M minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit H M curvæ perpendicularis.

Nam quoniam H M minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis H S, majori quàm H M, curvam secabit, & proinde tangentem M T, hanc puta in R. ergò quum sit H R $\sqsubset$ H M, non erit angulus H R M rectus. idem de punctis omnibus in recta T M evidens est. ergò tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta H M minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta T M; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) X M ; erit igitur X M ad H M perpendicularis. Unde pares erunt anguli H M X, H M T ; totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ H M propiorem H N remotiore H O minorem esse.

Nam ducatur subtensa M N ; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam H O secabit, puta in R. & quoniam Angulus H M R obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum H M constituit ad M) erit H N R magìs obtusus; adeóq; recta HR $\sqsubset$ HN & magis HO $\sqsubset$ HN.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad easdem puncti M partes puncto curvæ occurrere; nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari H M parallelæ sint rectæ I N, K O ; harum propior I N remotiore K O rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares E N, F O ; hæ cum ipsa H M intra curvam convenient, puta ad R, & P ; sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. F O K = ang, F P H $\sqsubset$ ang. P R Q = ang. N R H = ang. E N J. Cùm ergò sit ang. F O K major angulo E N J, liquet propositum.

XXXVII.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari HM assumpto ducantur ad curvam rectæ HN, HO; harum propior HN, remotiore HO rectiùs incidet.

Nam ducantur EN, FO curvæ perpendiculares, & IN, KO ad ipsam HM parallelæ. Est igitur ang. FOK $\sqsubset$ ang. ENI. Item ang. OHM $\sqsubset$ ang. NHM. hoc est ang. KOH $\sqsubset$ ang. INH. quare ang. FOK + KOH $\sqsubset$ ang ENI + INH. hoc est ang. FOH $\sqsubset$ ang. ENH. Unde constat Propositum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porrò si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens HM sit omnium curvæ incidentium minima; erit HM *curvæ* perpendicularis, seu tangenti MT. Fig. 35.

Nam dic aliam MR tangenti perpendicularem esse. ergò HR $\sqsupset$ HM. & magìs HO $\sqsupset$ HM. quare HM non est minima contra *Hypothesin*. *Apoll. V. 32.*

XX. Item si recta HM sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit HM curvæ perpendicularis. *Apoll. V. 29.*

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta MT Circulum tangat, hæc magìs extra curvam cadet, eámq; proinde continget. Est autem ang. HMT rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si MT sit minimæ vel maximæ HM perpendicularis; hæc *curvam* tanget. *Apoll. V. 30, 39.*

Nam si dicatur alia MX tangere; erit ideò ang. XMH rectus, & par angulo TMH: Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta YM non sit curvæ perpendicularis; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso YM cùrvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. *Apoll. V. 31, 47.*

XXIII. Si HM sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I; erit etiam IM minima. *Apoll. V. 30.*

 Cùm

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M deſcriptus *curvam* intròrſum tangat, etiam magìs *circulus centro* I *deſcriptus* introrſum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam ſi HM ſit incidentium maxima, & extra ipſam accipiatur punctum quodpiam I, erit IM maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *deſcriptus curvam* extrorſum
Apoll. V. 39. contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *deſcriptus eandem extrorſus continget.* unde conſtat *Propoſitum.*

Cæterùm *minimarum* & *maximarum propior determinatio pendet ex ſpeciali curvæ natura.*

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræſentiarum hujuſmodi pleraq; complecti profitemur. Inſtituto noſtro ſufficit hactenus generalis cujuſdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *ſpecimen* exhibuiſſe: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allatura.* Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicæq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibuſdam partibus adſcribere, vel ex anguſtiori fonte derivare. *Plura* forſan, & *abſtruſiora* proferemus aliquando. Nunc his ſuperſedemus.

LECT. VI.

Lect. VI.

AD easdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam anteà dudum exposui; illas præsertim, quas à veteribus *Geometris* observaram specialibus, quas ipsi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, si complures alias (abstrusiores quidem illas, at non injucundas prorsus, aut inutiles) apposuero; pro meo more quam concicissimè demonstratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis scientifica videtur, hoc est quæ nedum conclusionum veritatem asserit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Versantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium absque calculi molestia vel fastidio investigationem simul ac demonstrationem expeditam* (è simplicioribus nempe vulgatioribúsque perplexiora minúsque perspecta deducendo) *partim circa multarum magnitudinum dimensiones, tangentium designatarum ope, quam promptissimè determinandas*; quæ materiæ cùm præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (sicut aliæ quædam) occupatæ vel exhaustæ sunt, ad hunc saltem modum quod sciam nondum tractatæ Quin è vestigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clariùs & breviùs ostendendis aliquem prospicimus usum, prælibantes.

II Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D, sit item linea O D O talis, ut per D ductâ quàvis rectâ D N; sit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurrénsq; ipsi A B in L; & in protracta B L sumatur L Z = L B; ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob positam D O = M N; erit H O = B N; ergò quum sit D H . H O :: (D L . L N :: D L— D H.

$DH . LN - HO :: LH . LB ::) LH . HK$. erit $DH \times HK = HO \times LH$; hoc eſt $DL \times HK - LH \times HK = KO \times LH - HK \times LH$. unde erit $DL \times HK = KO \times LH$. vel $ZL \times LD = ZK \times KO$. ergò conſtat lineam O D O eſſe *Hyperbolen*, cujus *Aſymptoti* Z A, Z S. Breviùs hoc oſtendi poſſet, producendo rectam N D S. Nam eſt $DS = DM = DO \pm OM = NM \pm OM = ON$. Similiter quartam & nonam breviùs demonſtres licet.

Fig. 38. Quinimò ſi M N ad D O quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea O D O *Hyperbola* erit; Nempe ſi tum fiat $R . S :: LB . LZ$; & $R . S :: DL . DE$; & per Z ducatur Z S ad B C; ac per E tranſeat R E ad Z A parallela, cum Z S conveniens in Y; erunt Y R, Y S dictæ *Hyperbolæ aſymptoti* quod jam ſufficerit innuiſſe.

Hinc in tranſcurſu noto facilè confici *Problema (quo problematum confectiones iſtæ Archimedeæ, ac Vieteæ ope primæ Conchoidis peractæ, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, ſic ut anguli dati A B C lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam deſcriptâ hyperbolâ O D O; centro D, intervallo datam T æquante deſcribatur circulus P O Q *hyperbolam* interſecans in O; & producatur D O N; fiétq; $MN = DO = T$. Modus autem hic generalior eſt, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus A B C, et punctum datum D; ſit etiam linea O B O talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ D N, ſit anguli lateribus intercepta M N ad rectâ B C curvâque O B O interceptam M O in eadem ſemper ratione (puta X ad Y;) erit linea O B O *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta D L ad C B parallela, ipſi A B occurrens in L; ſecentúrque D L, B L punctis E, F, ut ſit $DL . DE :: X . Y :: BL . BF$; tum per E ducatur recta E R, ad B A; & per F recta F S ad B C parallela; concurrántque rectæ E R, F S puncto Z; denuò per punctum O ducatur O H ad A B parallela. Jam ob $DL . DH :: LN . HO :: LB + BN . HO :: DE \times LB + DE \times BN . DE \times HO$. item $DL \times KO = DE \times BN$ (nam $DL . DE :: MN . MO :: BN . KO$) & $DE \times LB = DL \times BF$ (ob $DE . DL :: BF . LB$;) erit $DL . DH :: DL \times BF + DL \times KO . DE \times HO$; hoc eſt $DL \times BF + DL \times KO . DH \times BF + DH \times KO :: DL \times BF + DL \times KO$.

D E

$DE \times HO$ ergò $DH \times BF + DH \times KO = DE \times HO$; hoc est $DH \times BF + DH \times HO - DH \times BL = DE \times HO$; transponendo igitur est $DH \times HO - DE \times HO = DH \times BL - DH \times BF$. hoc est $EH \times HO = DH \times FL$; vel $EH \times GO + EH \times$ Fig. 39.
$HG = DE \times FL + EH \times FL$; quare, demptis æqualibus, est $EH \times GO = DE \times FL$; vel $ZG \times GO = DE \times FL$; cum itaque $DE \times FL$ sit quid determinatum, constat lineam OBO esse hyperbolam, cujus asymptoti ZR, ZS.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema Fig. 40.
monstrat; nec abludit modus demonstrandi.

VI. Consectarium. Si recta BQ angulum ABC secet, pérque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam Fig. 41.
BQ intersecantes punctis OP (quorum utique sit O propius ipsi B) erit $MN.MO \sqsupset XY.XP$. Nam per O descripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, sic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur $MN.MO :: (XY.XV) \sqsupset XY.XP$.

Coroll. Dividendo est $NO.MO \sqsupset YP.PX$.

VII. Quinimò si plures lineæ BQ, BG angulum ABC secent; Fig. 42.
& à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras intersecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit $NE.MO \sqsupset YF.VX$.

Nam $NE.EO \sqsupset YF.FV$; & $EO.OM \sqsupset FV.VX$. igitur ex æquo est $NE.OM \sqsupset YF.VX$. ||

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci posse; ità ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam sumatur $PQ = PZ$; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quam habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad easdem; hoc est minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rursum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item Fig. 43.
linea

linea O O O talis, ut si è D utcunque ducatur recta D O, secans anguli latera punctis M, N, habeat D M ad N O semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea O O O hyperbola.

Fig. 43.

Nam ducatur D L ad B C parallela; sitque D L . D E : : X . Y; & per E ducatur E R ad A B parallela; secans B C in Z; demum per O ducatur O H ad B A parallela.

Est jam D L . D E : : D M . N O : : L M . G O (ob similia triangula D L M, N G O) : : L M × D H . G O × D H item D L × H O = L M × D H (ob D L . L M : : D H . H O) quare D L . D E : : D L × H O . G O × D H hoc est D L × H O . D E × H O : : D L × H O . G O × D H adeóq; D E × H O = G O × D H . hoc est D E × H G + D E × G O = G O × D E + G O × E H quare (communi sublato) est D E × H G = G O × E H; seu D E × H G = G O × Z G. Patet itaque curvam O O O esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* Z R Z C.

Coroll. Si ratio data sit æqualitatis (ceu D M = N O,) ipsæ A B, C B asymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magìs id perspicuum videtur, Algebricè monstrabimus.

Fig. 44.

X. Esto positione data recta I D, in qua punctum designatum D; sit item curva D N N talis ut in I D sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ G N ad positionem datam I K parallelá; tum adsumptis determinatis rectis m, b; positísq; $DG = x$, & $GN = y$; sit constantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea D N N *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur D M, & D O (hinc indè) pares ipsi m; & per M ducatur M L ad I K parallela, factóq; $b . m :: m . MQ$; sit $MZ = 2 MQ = \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta Z T; erunt Z M, Z T ásymptoti.

Ducatur enim Z S ad M O parallela, cui occurrat N G in R (quæ & ipsam Z T secet in P). & connectatur D Q. Est ergò $PN = RG + GN - RP$. Verùm est $MD . MQ :: ZR (MG) . RP$; hoc est $m . \frac{mm}{b} :: m + x . RP = \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$. adeóq; $RG - RP = \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$. ergò $PN = \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde $PN \times MG = \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$. Verùm (ex hypothesi) est my

+

$+ xy - \frac{mxx}{b} = 0.$ ergò $PN \times MG = \frac{m^3}{b} = MD \times ZQ.$ vel $PN . ZQ :: (MD . MG ::) QD . ZP$. Quapropter est $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Unde palàm est curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus asymptoti Z M, Z T. Fig. 44.

XI. Notetur; si æquatio sit $my - xy = \frac{m}{b} xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc solùm puncta G ad partes D M sumuntur. Quin & si æquatio sit $xy - my = \frac{m}{b} xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipsi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum B D F; & linea D N N talis, ut ductâ utcunque R N ad B D parallelâ (quæ lineas B F, D F, D N N secet punctis R, G, N) connexâque rectâ D N; sit perpetuò D N proportione media inter R N, N G; erit linea D N N *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur D K ad D B perpendicularis (secans ipsam R N in E) & sit F H ad D B parallela; vocentúrque $DB = b$; $DF = d$; $FH = f$; tum $DG = x$; & $GN = y$; Estque $d . f :: x . \frac{fx}{d} = GE$, unde $\frac{2fxy}{d} + xx + yy = 2 EG \times GN + DGq + GNq = DNq$. Porrò est $d . b :: FG . GR :: d - x . RG = b - \frac{bx}{d}$. Unde $RN = b - \frac{bx}{d} + y$. Et ideò $by - \frac{bxy}{d} + yy = RN \times NG = DNq = \frac{2fxy}{d} + xx + yy$. quare $by - \frac{bxy}{d} = \frac{2fxy}{d} + xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f + b} y - yx = \frac{d}{2f + b} xx$. quòd si ponatur $m = \frac{db}{2f + b}$; erit $my - xy = \frac{m}{b} xx$. Unde liquet D N N esse *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus D G N rectus fuerit, evanescente tum $f = 0$, erit

 $d =$

$d=m$; vel $dy-xy=\frac{d}{b}xx$. Alia quædam hìc (nonnulla forsan παρέργως) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta I D; sit item curva D N N talis, ut in I D sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ; sumptísque determinatis lineis g, m, r; positísque $DG=x$, & $GN=y$; sit perpetim $yx+gx-my=\frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur $DM=m$; & per M ducatur M L ad I K parallela; & in hac accipiatur $MQ=\frac{mm}{r}$; & sit $QY=MQ$; & ab M Y auferatur $YZ=g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *asymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (sed & G R ipsam Z T secet in P). Estque jam $PN=RG-RP-GN=\frac{mm}{r}-g+\frac{mx}{r}-y$. adeoque $PN\times MG=\frac{m^3}{r}-mg+yx+gx-my-\frac{m}{r}xx=\frac{m^3}{r}-mg+o.=\frac{m^3}{r}-mg=DM\times ZQ$. unde $PN.ZQ::(DM.MG::)QD.ZP$. ergò $PN\times ZP=ZQ\times QD$. Liquet igitur curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* Z M, Z T.

Si æquatiò sit $-yz+gx+my=\frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47. XIV. Positione datæ sint rectæ D B, B A; pérque rectam D B feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando transeat recta D Y, sic ipsam B A secans in E, ut sit inter rectas B E, D C eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad DB) rectæ verò D E, C X se intersecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam sit $R.DB::DB.P$. Est ergò $BE.DC::DB.P$. Item est $DB.BE::DC.CN$. ergò $DB.BE+BE.DC=DC.CN$

CN + DB . P. hoc eſt DB . DC :: DC × DB . CN × P. hoc eſt DB × DC . DCq :: DC × DB . CN × P. Quapropter eſt DCq = CN × P; ergò patet *curvam D NN eſſe parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipſi BA parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* ſed operosâ (ſi probè memini) prolixitate, demonſtratum. *In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iiſdem poſitis, ità ferantur CX, & DY, ut jam ſemper habeant BE, BC rationem eandem (puta quam BD ad R) erunt etiam interſectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam biſecetur DB in G, ducatúrque GV ad BE parallela, ſecans curvam DNN in V; & quoniam eſt BC . R :: BE . BD :: CN . CD . erit BC × CD = R × CN. ergò (ſecundum benè notam *parabolæ proprietatem*) eſt curva DNN *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* GV.

Proletaria ſunt forſan iſta; ſed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis ſimiliter poſitis, recta CX non jam ad ipſam BA, ſed ad aliam poſitione datam (DH) feratur parallela; ſitque perpetuò BE . DC :: DB . R; erunt *interſectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ NG ad BA parallelâ, nuncupentur DB = b . BH = h; DG = x . GN = y. Eſtque $x . y :: b . \frac{by}{x}$ = BE. item $h . b :: y . \frac{by}{h}$ = GC. quare CD = $x - \frac{by}{h}$. Eſt igitur (ex hypotheſi) $\frac{by}{x} . x - \frac{by}{h} :: b . r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{hry}{b} = \frac{h}{b}xx$. ponendóq; $\frac{hr}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r}xx$; eſt ergò curva DNN *hyperbola*,* quæ ſuprà habetur determinata. * In 10 hujus.

XVII. Quinetiam ſi (reliquis, ut in præcedente, ſuppoſitis) ità jam feratur CX, ut ſemper habeat BE ad BC rationem eandem, quam BD ad R; erunt itidem interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ NG ad AB parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èſtque jam BC = $b - x + \frac{by}{h}$; atque $\frac{by}{x} . b - x +$

by

$\frac{by}{b} :: b . r$. unde talis emerget æquatio: $yx + hx - \frac{hr}{b}y = \frac{b}{b}$

Fig. 50, 51, 52. xxx; hoc eſt (poſito $\frac{hr}{b} = m$) $yx + hx - my = \frac{m}{r}xx$; Eſt igitur curva B N N *hyperbola*, qualem ſuperiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; (& in D B deſignetur punctum D) ſitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N

Fig. 53. ad B A parallelâ; ſumptis verò determinatis g, r, vocatíſque D G $= x$; & G N $= y$, ſit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, ſic determinanda.

Capiatur D E $= r$, & B O $= g$; & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ; erunt Z R, Z S *aſymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, eſt Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P × P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypotheſi eſt $- gx + ry - yx = 0$. ergò Z P × P N $= gr =$ Z E × E D. undè liquido conſtat Propoſitum.

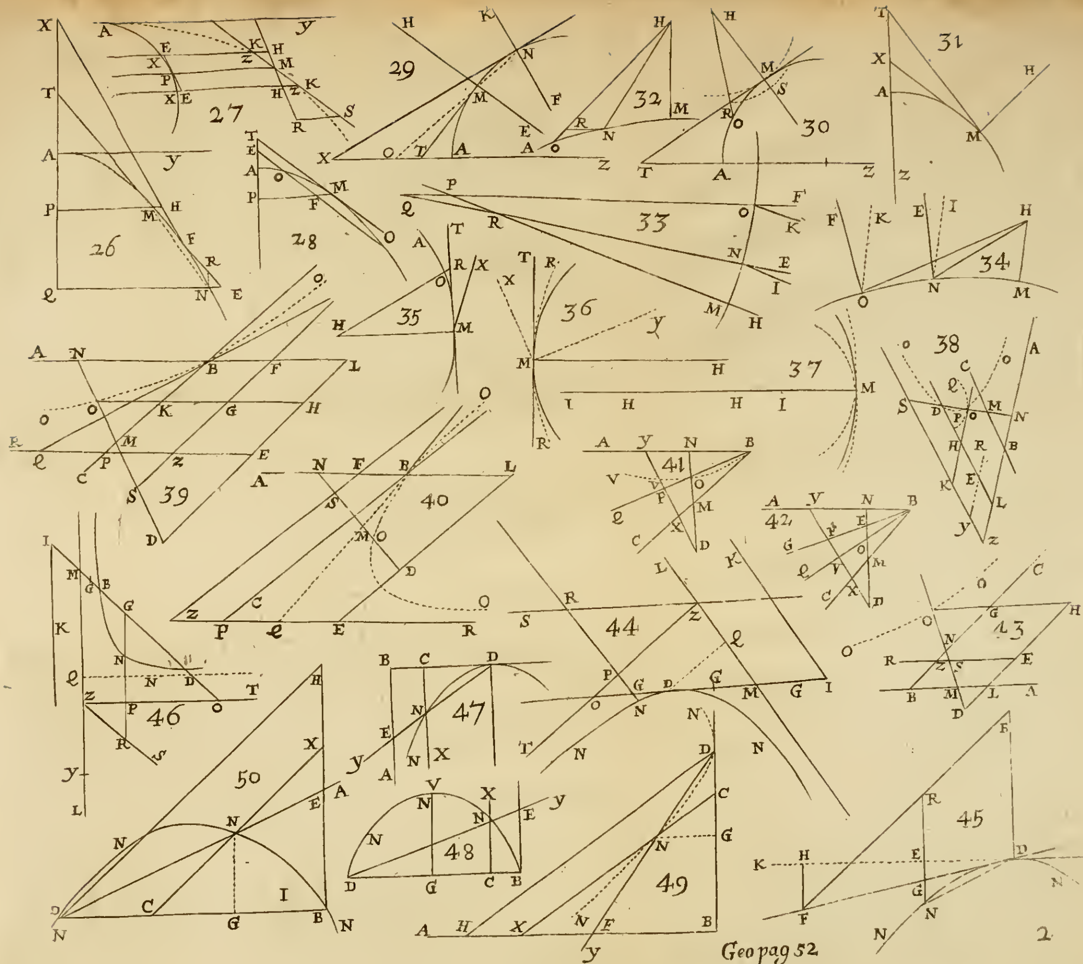
Quòd ſi fuerit æquatio $xy - ry = gx$; ſumenda eſt D E $= r$; & B O $= g$ (infra rectam D B) ductíſque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehenſa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallela, ac D Y per punctum deſignatum D tranſiens, ut ſit ſemper ratio ipſius B E ad ipſam B F æqualis aſſignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X interſectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur G K ad B A parallela; éſtque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque ſemper eſt D G = R. Patet igitur factâ D G = R, & ductâ G K ad B A parallelâ, interſectiones omnes ad hanc exiſtere.

XX. Quòd ſi reliquis ſimiliter poſitis; ſumpto autem alio in B A puncto O; ab hoc ſumatur computandi initium; ut nimirùm ſit perpetuò B E, O F :: D B . R; erunt interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, ſit D B $= b$; O B $= g$; D G =


26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
Geo pag 52
2

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x}$. $g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN eſt *hyperbola* ſuprà mox determinata.

Quòd ſi punctum O ſumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rurſus conſtat.

XXI. Quinetiam, reliquis ſimiliter poſitis, recta FX non jam ipſi DB, ſed alteri DH feratur parallela; ità ut aſſumpto in BA puncto habeat ſemper BE ad OF rationem aſſignatam (DB ad m) erunt interſectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocentúrque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; eſt ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare NK (FH) $= y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Eſt ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde reſultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b}xx$. vel facto $f . b :: m . r$; eſt $my + gx - yx = \frac{m}{r}xx$. Conſtat igitur lineam DNN eſſe *hyperbolam*; qualis ſuperiùs habetur determinata.

Notetur, Si computatio ab ipſo puncto H. initium ſumat, (hoc eſt ſit BE. HF :: DB. m) evaneſcente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r}xx$; unde quoque ſuprà habetur alia determinatio ſimplicior.

XXII. Eſto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, ſit perpetuò $PY = \sqrt{:PMq - DBq}$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum eſt A, *ſemidiameter* AD, (vel *aſymptotos* AB) *ſemiparameter* autem P; faciendo AD. DB :: DB. P. Fig. 55.

Sit enim TD = 2 AD. Eſtque AD P :: (ADq. DBq :: [*6. 2. Elem.] APq. PMq :: *TP × DP + ADq. PMq :: TP × DP. PMq − DBq ::) TP × DP. PYq. vel TD. 2P; TP × DP. PYq. unde liquet Propoſitum.

Corol.

Corol. Si Y S tangat *hyperbolam* D Y Y; erit P M q . P Y q : : P A . P S.

Nam est P M q . D B q : : P A q . A D q : : P A . A S. ergò per rationis conversionem est P M q . P Y q : : P A . P S.

Fig. 56. XXIII. Quòd si reliquis similiter positis; sit jam $PY = \sqrt{PMq + DBq}$; erit etiam linea Y Y Y *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* A F (parallela & æqualis ipsi D B) *Semiparameter* autem P, si fiat A F . A D : : A D . P.

Nam ducatur Y K ipsi A P parallela cum A F conveniens in K; Sitque F T = 2 F A; éstque A F . P : : (A F q . A D q : : D B q . A D q : : P M q . A P q : : P Y q — D B q . A P q : : A K q — A F q . K Y q : :) T K × F K . K Y q : : A F . P. unde constat Propositum.

Corol. Rursus, Si recta Y S *hyperbolam* F Y Y tangat, erit P M q . P Y q : : P A . P S.

Nam A D est *Semidiameter* ipsi A F conjugata. unde P A . A S : : P A q . A D q : : P M q . D B q. ergò P A . P S : : P M q . P M q + D B q : : P M q . P Y q.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum A D B, rectum habens angulum A D B; & curva C G D talis, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad D B parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex E F, E G æquale quadrato ex D B; erit curva C G D *Ellipsis* cujus semiaxes A D, A C.

Nam sit A V = A D. Estque A D q . D B q (A C q) : : A E q . E F q : : A D q — A E q . D B q — E F q. Hoc est A D q . A C q : : V E × E D . E G q. unde liquet Propositum.

Nota, Tangat G T *ellipsin* C G D; est E F q . E G q : : E A . E T.

Nam ob A E . A D : : A D . A T . est A E q . A D q : : A E . A T. unde A E q . A D q — A E q : : A E . A T — A E. Hoc est E F q . D B q — E F q : : A E . E T. hoc est E F q . E G q : : A E . E T.

Sit *Angulus rectilineus* D T H, in cujus latere T D signetur punctum A. Sit item curva V G G proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam E F G ad T D perpendiculari (quæ lineas T D, T H, V G G secet punctis E, F, G,) connexáque rectâ A F, sit E G = A F; erit linea V G G *hyperbola*.

Fig. 58.

Nam ducantur A P ad T H & V P C ad T D perpendiculares; item

item PO ad TE parallela. Estque $EFq = EOq (CPq) + OFq + 2 EO \times OF (+ 2 CP \times OF)$. Verùm ob $CP . CA :: OP . OF :: CE . OF$; est $CP \times OF = CA \times CE$; ergò $EFq = CPq + OFq + 2 CA \times CE$. item est $AEq = CEq + CAq - 2 CA \times CE$; quapropter est $EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq$. hoc est $EGq = (APq + PFq =) CVq + PFq$. vel $EGq - PFq = CVq$. Verùm est $CE . (PO) . PF :: CP . AP :: CP . CV$; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq = CVq$; adeóque linea GVG est *hyperbola*, cujus centrum C; semiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, sumptáque $QR = AE$; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præsta sis fidem; aut ipse rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Positione datæ sint rectæ AC, BD (se intersecantes in X) quas decusset recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD secet punctis P, K) sit PL æqualis ipsi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, est $AQ . AP :: (BX . BK ::) QX . PL$: ergò linea ALL est recta.

XXVII. Positione data sit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX secet in M, & lineam DNN in N) sit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; sitque $DB . Z :: Z . DE$; & connectatur NE; Est jam $DM \times DN = Zq = DB \times DE$; quare $DM . DB :: DE . DN$. ergò triangula DBM, DNE similia sunt; quapropter angulus DNE rectus est; itaque linea DNN est circularis; (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; sed & suo modo rectam ac *circulum* sibi lineas esse reciprocas. Verùm hîc, etsi præludiis nostris nondum absolutis, paulùm subsistamus.

LECT. VII.

Lect. VII.

ADhuc in *Vestibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adsumpto tertio quopiam X, erit $A + X . B + X \sqsupset A . B$.

Nam ob $X . A \sqsupset X . B$; erit componendo $X + A . A . \sqsupset X + B . B$. vel permutando $X + A . X + B \sqsupset A . B$.

II. In linea YZ signentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N sumpto puncto quopiam E, alteróque G extra LN (versus Z);
Fig. 61. secetur EG in F, ut sit $GE . EF :: NL . LM$; cadet punctum F ad partes MZ:
* 1 hujus. Nam est $NE . ME$ * $\sqsubset NL . ML :: GE . FE \sqsubset NE . PE$. ergo $FE \sqsubset ME$.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ;
Fig. 62. pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipsam GP secantes punctis L, K, dico fore $DS . DT :: KG . LG$.
Nam est $KG . LG = KG . GB + GB . LG = PK . PS + PT . PL = DB . DS + DT . DB = DT . DS$.

IV. Esto triangulum BDT, basíque DB parallelam quamvis PG intersecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K; dico fore $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$.
Fig. 63 Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$; unde constat junctas PM, PN, PO ipsis TB, SB, RB (respectivè) parallelas esse. Et quoniam est $DM . PD :: DB . TD$. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter est $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, transponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili plané

discursu

discursu est $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc est $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem redigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$; transponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc est $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogismum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propositum. Fig. 63.

V. Quòd si puncta T, R non ad easdem puncti D partes sita sint, erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$. Fig. 64.

Simili constabit id discursu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquinumeræ (quales adscriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint ($A . \alpha :: M . \mu$; & $F . \varphi :: S . \sigma$) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

A.	B.	C.	D.	E.	F.
α.	β.	γ.	δ.	ϵ.	φ.
M.	N.	O.	P.	R.	S.
μ.	ν.	o.	π.	ρ.	σ.

Sunt enim $A\mu$, $B\nu$, Co, $D\pi$, $E\rho$, $F\sigma$, & αM, βN, γO, δP, ϵR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur sit $A\mu = \alpha M$; & $F\sigma = \varphi S$, liquidum est fore $D\pi = \sigma P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ A B, C D parallelæ sint; hásque secet positione data B D; lineæ verò E B E, F B F ita relatæ sint, ut ductâ utcunque recta P G ad D B parallelâ; sit semper P F eodem ordine media proportionalis inter P G, P E; tum per quodvis designatum lineæ E B E punctum E transeat H E ipsis A B, C D parallela, sítque alia curva K E K talis, ut ductâ utcunque Q L itidem ad D B parallelâ, sit Q X Fig. 65.

eodem semper ordine media inter Q L, Q I (eodem inquam illo, quo
Fig. 65. P F media fuerat inter P G, P E): dico lineas F B F, K E K analogas esse; hoc est ordinatas (quales Q R, Q K) eandem perpetuò inter se rationem habere; eandem scilicet illi quam habet P F ad P E.

Hoc è Lemmate proximè præmisso consectatur, utì patebit, ad subjectum Schema mentem advertendo.

QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} Sunt ÷÷. unde Q R. Q K :: P F. P E.

Not. Pro lineis rectis A B, H E, C D substitui possent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rursus, in A concurrentes duæ rectæ A B, A D, rectaq; B D positione data; item duæ curvæ E B E, F B F sic relatæ, ut ductâ utcunque P G ad D B parallelâ, sit semper P F eodem ordine media proportionalis inter P G, P E; tum connexâ A E, sit alia curva K E K talis, ut ductâ quâpiam rectâ Q L I ad D B parallelâ sit semper Q K eodem ordine media inter Q L, Q I, quo fuit P F inter P G, P E; erit rursus linea F E F ipsi K B K analoga; seu perpetim Q R. Q K :: P F. P E.

Nam QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} sunt ÷÷.

item QS. QL :: PG. PE.
Et QI. QI :: PE. PE.
} ergò QR. QK :: PF. PE.

Not. Pro rectis A B, A H, A D substitui possent tres quævis lineæ analogæ.

XI Item, sit circulus A G B, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ
Fig. 67. E B E, F B F tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ D G, sit perpetuò D F eodem ordine media proportionalis inter D G, D E; tum centro D per E describatur circulus H E; sitque præterea curva K E K talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum H E) rectâ D L, sit semper

DK

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, seu perpetuò DR . DK :: DF . DE.

Nam rursus DS.* DR. *DI.
DL.*DK. *DI.
DG.*DF. *DE.
DE.*DE. *DE.
} sunt ÷÷. unde DR . DK :: DF. DE.

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis AGBG, EBE; & altéra FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D recta DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL lineæ AGB analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuò linea KEK talis, ut ductâ utcunque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KEK analoga.

Rursus enim DS.*DR*DI.
DL.*DK*DI
DG.*DF*DE
DE.*DE*DE
} sunt ÷÷; } Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D . A —: F :: N . M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò D = A ± NX. & F = A ± MX. quare A —: D = NX. & A —: F = MX. unde A —: D . A —: F :: (NX . MX ::) N . M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur

 bini,

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit $A - : D . A - : F :: M - : P . M - : R$.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim $A + N \sqsubset 2 M$ (vel $\sqsubset$) $2 B = A + C$. ergò $N \sqsubset C$. unde $M + N \sqsubset B + C = A + D$. Est autem $A + O \sqsubset M + N$. ergò $A + O \sqsubset A + D$. Et ideò $O \sqsubset D$. ergò $M + O \sqsubset B + D = A + E$. Est autem $A + P \sqsubset M + O$. ergò $A + P \sqsubset A + E$; adeóque $P \sqsubset E$. similique porrò discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F $\div\div$ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q sint $\div\div$ Geometricè; sitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quam M.

Nam si dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si $F = Q$; constat ex præcedente fore $E \sqsubset P$ (scilicet utramque seriem invertendo) sin $F \sqsubset Q$; potiori jure liquet fore $E \sqsubset P$.

XVI. Quinimò demùm, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica; puta, C majus est quàm N.

Est

Est enim $E \sqsubset P$, ac indè $D \sqsubset O$; & hinc $C \sqsubset N$.

XVII. Consectatur hinc; si fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, EBE sese intersecantes in B, ac ita versus se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ DH ad positione datam DB parallelâ (in linea nempe DDD terminatâ) vel à designato puncto D projectâ DH; sit perpetuò DG inter DH; DE eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo DF inter easdem media Geometricè; lineæ GBG, FBF sese mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea GBH extra lineam FBF totam cadere manifestum è præcedente.

XVIII. Ex isthinc etiam (quod strictim transcurrens moneo) diversis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ *ἀσύμπτωτοι* definiuntur. Sint nempe rectæ VD, BD positione datæ; sint item aliæ duæ rectæ AB, VI; ductâ verò liberè rectâ PG ad DB parallela, sit $P\varphi$ constantèr inter PG, PE eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo PF inter easdem media Geometricè; quia jam (a) rectæ EG, $E\varphi$ semper eandem obtinent rationem, est linea $\varphi\varphi\varphi$ recta; verùm linea VFE est *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, si PF sit inter ipsas PG, PE simpliciter media, sed alia diversi generis quædam *hyperboliformis*, si PF sit alterius cujuspiam ordinis media) atqui patet è penultima præmissa lineam $\varphi\varphi\varphi$ eodem ordine respondenti lineæ VFF *asymptoton* esse. quod an *πρὸ ἔργου* sit nescio, nobis certè *πάρεργον* fuit, hîc adnotâsse. Fig. 70. (a) 12 *hujus*.

XIX. A puncto assignato B ad datam positione rectam AC ductæ sint rectæ tres BA, BC, BQ; tum in QC producta sumatur sumptum quodpiam D; per B recta (puta BR) duci potest (ad alterutras ipsius BQ partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu DN; sit hujus à rectis BQ, BR intercepta pars (FE) minor ejusdem à rectis BA, BC interceptâ parte (NM). Fig. 71.

Nam, primò, si BR ultra angulum ABC jaceat respectu puncti D; fiat $QR = CA$; & connectatur BR; tum utcunque ducatur DE, rectas secans, ut vides; & manifestum est, * è supra monstratis fore, $FE \sqsupset NM$. * *Per* 7. *Lect.* VI.

Sin BQ citra angulum ABC cadat versus D; (a) ducatur recta BH talis, ut à BQ, BH interceptæ minores sint interceptis à BQ, BA; & sumatur $HR = QC$; & connectatur BR; tum rursus utcunque ductâ DN, quæ rectas intersecet, ut exhibet Schema; quoniam * *Per* VI. 8 *Lect.* Fig. 72.

(b) *Constr.* niam jam est $KF (b) \sqsupset NF$; & $KE^{*} \sqsubset MF$; perspicuum est restare $FE \sqsupset NM$.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73. XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum (a) 19. *hujus.* ENM, FKI) manifestum est fore $MN \sqsupset IK$; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis Fig. 74. ipsi CB; & connectatur EL; Estque jam $IK . MN :: FK . EN ::$ (c) *Constr.* $DF . DE :: FC . ES :: BC . RS$ (c) $:: LS . RS$ (d) $\sqsubset QN$. (d) 6. Lect. VI. MN. quapropter est $IK \sqsubset QN$. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 75. XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est $BK + KO \sqsubset BO = BK + KA$. ergò $KA \sqsubset KO$.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit $KL + LO \sqsubset KA$.

Nam, supra contactum versus A, est $KL + LO \sqsubset KO \sqsubset KA$.

Infra verò, est $KL + LB \sqsubset KB$ (ex hypothesibus *Archimedæis*) adeóque $KL + LO \sqsubset KA$.

Lect. VIII.

MIhi sanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *sapiens ille Scurra, perquam exiguæ Civitati portas ingentes extruxisse*. Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propiùs enitimur. ad illam.

I. Hæc adsumimus. Si duæ lineæ (O M O, T M T) sese contingant, angulos ipsæ comprehendunt (O M T) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (O M O. T M T) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ sese contingent (contingentibus saltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas O M O, T M T tertia quæpiam linea P M P contingat, ipsæ etiam lineæ O M O, T M T sese contingent.

Nam quoniam lineæ O M O, P M P sese contingunt, erit angulus O M P quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum T M T, P M P *contractum*, erit *angulus* T M P quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus T M O *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ O M O, T M T se mutuò contingent.

III. Tangat recta F A curvam F X in F; sitque positione data recta F E; sint item duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ductâ utcunque rectâ I L ad E F parallelâ (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit semper intercepta K L æqualis interceptæ I G; etiam curvæ E Y, E Z sese contingent. Fig. 78.

Si non tangant, potest inter ipsas constitui angulus rectilineus, puta B E C; hunc utcunque secet ad F E parallela I L; sumatúrque G H = B C, & connectatur F H; sunt igitur è parallelis ad F E à rectis

F G,

F G, F H interceptæ pares interceptis ab E B, E C; hoc eſt minores interceptis à curvis E Y, E Z; hoc eſt minores interceptis à curva F X, & recta F A; quapropter angulus X F A rectilineo H F G major eſt; unde recta F A curvam F X non tangit, contra *Hypotheſin*.

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta F A curvam F X, & ſint duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ I L (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit ſemper K L = I G; curvæ E Y, E Z ſeſe tangent.

Nam, ſi neges, his interſeratur *angulus rectilineus* B E C; quem
(a) 20 Lect. VII. utcunque a D projecta ſecet recta D L; (a) poteſt jam ab F recta duci (puta F H) talis, ut ſint è projectis à D a rectis F G, F H interceptæ minores interceptis ab ipſis E B, E C, hoc eſt multo minores interceptis à recta E A, curváque F X. Unde ſequetur angulum A F X rectilineo G F H majorem eſſe; ac idcircò rectam A F non contingere curvam F X, adverſus *Hypotheſin*.

Hæ præcedentes duæ Concluſiones veræ ſunt, & ſimili ratione demonſtrantur, poſito interceptas I G, K L quamvis ad ſe perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Propoſuimus hæc, ut ſequentium nonnulla à ſcrupulis muniantur.

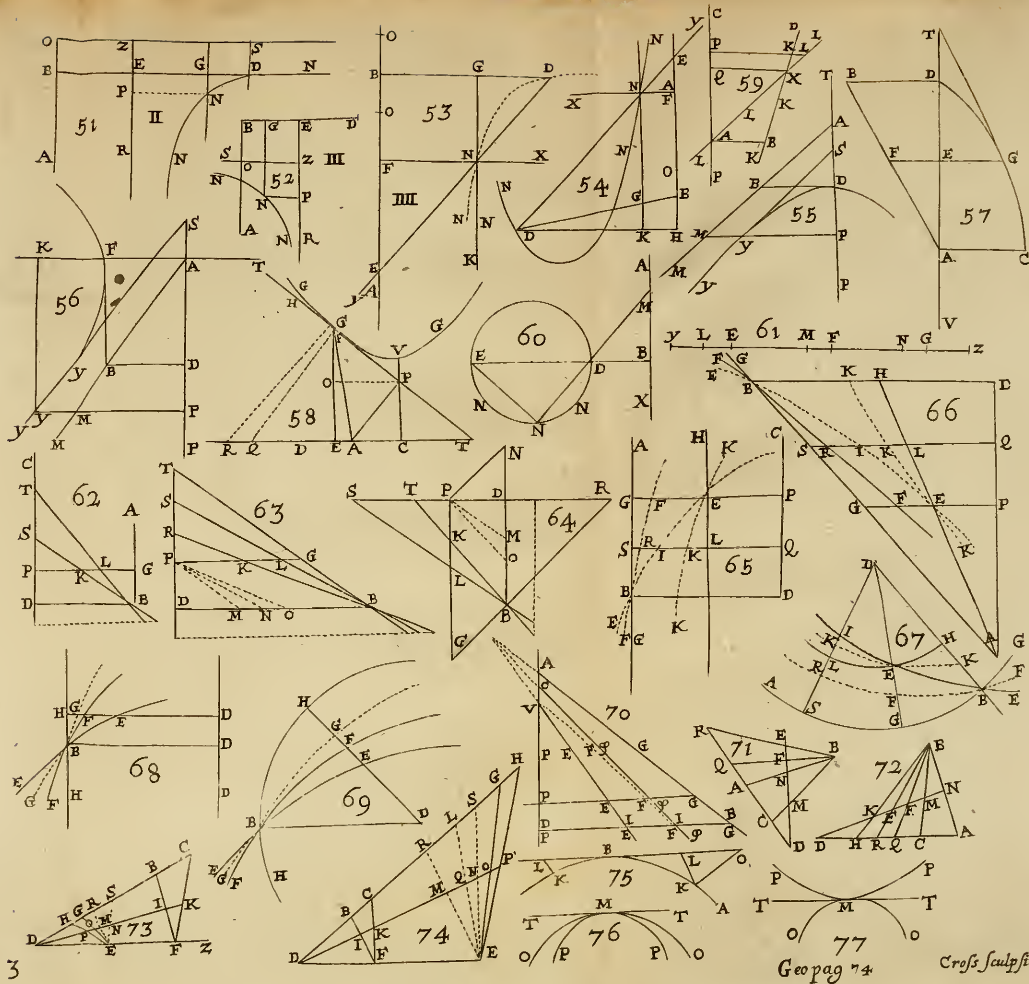
V. Sit recta V E I, duæque curvæ Y F N, Z G O ſic ad ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad poſitione datam A B parallelâ, habeant interceptæ E G, E F ſemper eandem rationem inter ſe; tangat autem recta T G curvarum unam Z G O in G (cum recta V E conveniens in T) ducta T F alteram Y F N quoque continget.

Nam utcunque ducatur recta I L (lineas expoſitas ut vides interſecans) Eſt igitur I L . I N (a) $\sqsubset$ I O . I N :: E G . E F :: I L . I K.
(a) Hyp. Igitur I N $\sqsupset$ I K. ergò punctum K extra curvam Y F N jacet; totáq; recta T F.

Aliter. Eſt I L . I K :: (I O . I N :: I K — I O . I K — I N ::)
(b) Hyp. O L . N K, ergò cùm lineæ G L, G O ſe (b) tangant, (c) etiam li-
(c) Schol. 4. hujus. neæ F N, F K ſeſe tangent.

Fig. 80. VI. Etiam ſi tres curvæ X E M, Y F N, Z G O ità referantur ad ſe, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad poſitione datam parallelâ, ſint ſemper E G, E F in eadem ratione, concurrant autem duarum X E M, Z G O tangentes E T, G T in T; adjuncta T F curvam Y F N tanget.

Nam


51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
3
Geo pag 74
Cross sculpsit

Nam (facto ut priùs) erit I L . I K : : E G . E F : : M O . M N.
* quapropter erit punctum K extra curvam Y F N. * 2. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi ; sed verbis pluribus.

Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam στενολεσχίαν ego ac ἀδολεσχίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ X E M, Y F N, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ D E F, habeant ad se rectæ D E, D F rationem semper eandem ; unam verò Y F N tangat recta F S ; cui parallela sit E R ; tanget recta E R curvam X E M. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta D K (lineas intersecans, ut vides). Estque D K . D I : : D F . D E : : D N . D M ; ergò quum sit D K ⊏ D N ; erit D I ⊏ D M ; quare tota recta R E extra curvam X E M cadit.

Rectæ N K, M I rationem semper eandem obtinent ; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ X E M, Y F N, Z G O tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ E G, E F rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ E T, G T curvarum duas (puta X E M, Z G O) in E, G ; oportet curvæ Y F N tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva T F V talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D M K L, (quæ secet rectas T E, T G punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ I L, I K rationem eandem datæ R ad S ; (*a*) est igitur I K ⊏ I N ; quare curva T F K curvam Y F N tangit ; (*b*) est autem curva T F K *hyperbola* ; hanc tangat F S ; (*c*) illa quoque curvam Y F N tanget. (*a*) 2 Lect. VIII. (*b*) 4 Lect. VI. (*c*) 2. *hujus*.

Quoniam *hyperbolam* tangentis hîc primum injecta est mentio ; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint V D recta linea, duæque curvæ X E M, Y F N ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ E D F ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex D E, D F par eidem alicui spatio ; tangat autem recta E T curvam X E M in E, cum recta V D concurrens in T ; sumatúrque D S = D T ; & connectatur F S ; hæc curvam Y F N tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur I N ad E F parallela, lineas expositas se-

cans, ut vides. Estque $TP . PM \sqsubset (TP . PI ::) TD . DE$ item $SP . PK :: SD . DF$. ergò $TP \times SP . PM \times PK \sqsubset TD \times SD . DE \times DF :: TD \times SD . PM \times PN$. Verum $TD \times SD \sqsubset TP \times SP$; ac indè magìs $TD \times SD . PM \times PK \sqsubset TD \times SD . PM \times PN$. quare $PM \times PK \sqsupset PM \times PN$; vel $PK \sqsupset PN$. Itaque recta F S extra curvam Y F N tota jacet.

Not. Si linea X E M recta fuerit (utique ipsi T E I coincidens) erit Y F N *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *asymptotos* una T S, altera T Z ad E F parallela.

X. Quinetiam sit punctum D; curvæque duæ X E M, Y F N ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ E F; sit perpetuò rectangulum ex D E, D F æquale cuidam quadrato (ex Z puta); unam verò curvam X E M tangat recta E R; alterius ad F tangens ita determinatur: Ducatur D P ad E R perpendicularis: factóque $DP . Z :: Z . DB$; bisecetur D B in C; connexâque C F, ducatur F S ad C F normalis; hæc curvam Y F N tanget. Fig. 84.

Nam centro C per F describatur *Circulus* D O B; & per B trajiciatur utcunque recta I N lineas intersecans, ut vides; estque $DO \times DI$ (a) $= DP \times DB$ (b) $= Zq$ (c) $= DM \times DN$ vel $DO . DM :: DN . DI$. ergò quum sit DM (c) $\sqsupset DI$; erit $DO \sqsupset DN$; itaque circulus D O B curvam Y F N tanget. Quare recta F S eandem Y F N tanget.

(a) 27 Lect. VI.
(b) Constr.
(c) Hyp.

XI. Curvæ X E M, Y F N tales sint, ut ductâ quâpiam F E ad positione datam parallelâ, sit semper hæc æqualis eidem alicui; curvàm autem Y F N tangat recta S F; huic parallela R E alteram X E M continget. Fig. 85.

Nam utcunque ductâ M K ad F E parallelâ est $NI \sqsupset (KI = FE =) NM$. Quare punctum I extra curvam X E M jacet, &c.

Reverà linea X E M nil aliud est, quàm ipsa Y F N *translocata*. Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propositum.

XII. Sit curva quæpiam X E M, quam tangat recta E R ad E; sit item alia curva Y F N ad alteram ità relata, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ D E F, sit semper intercepta E F æqualis alicui determinatæ Z; curvæ Y F N tangens (ad F) ità designatur: Sumatur $DH = Z$; & per H ducatur A H ad D H perpendicularis, ipsi E R occurrens in B, & per F ducatur F G ad A B parallela; sumatúrque $GL = GB$; erit connexa L F S curvæ Y F N tangens. Fig. 86.

Nam

Nam *asymptotis* E R, A B per F descripta concipiatur *hyperbola* O F O; cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expositas (a) Convers. 9 secans, utì cernis. Estque Q O (a) = D P; (b) quare M O $\sqsubset$ D P Lect. VI. (c) $\sqsubset$ D H (b) = M N. ergò *hyperbola* O F O curvam Y F N tan- (b) Hyp. git. (c) Elem.

Verùm (d) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam (d) 9. hujus Y F N quoque tanget.

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipsi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex da- Fig. 87. tâ Z; item curvam B E I tangat recta E T; tum fiat P E q. P F q :: P T. P S; connexa S F curvam D F G tanget.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò Q K q = Q H q + Z q; unde quoniam est Q K (a) $\sqsubset$ Q I; erit Q K q — (a) Hyp. Z q $\sqsubset$ Q I q — Z q; hoc est Q H q $\sqsubset$ Q G q; ergò curva V F H (b) 22. Lect. 6. curvam D F G tanget ad F; (b) est autem curva V F H *hyperbola*, quam (c) Cor. 22. (c) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque contin- Lect. I. get.

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam P E unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex P F; fiátque P E q. P F q :: P T. P S; Fig. 88. & connectatur F S; hæc rursus ipsam G F G continget.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23am primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; Fig. 89. tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B; & fiat E F q. E G q :: E R. E T; connexa G T curvam C G D quoque tanget.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R secet punctis K, Q, curvam O G O in O) sit Q K q + Q O = Z q; erit ideò Q K q + Q O q = Q I q + Q L q; & cùm sit Q K q (a) $\sqsubset$ Q I q, erit ideò Q O q $\sqsupset$ Q L q. itaque (a) Hyp. curva O G O curvam C G D (introrsum) tangit. (b) Est autem (ex (b) 24. Lect. VI.

 ostensis)

oſtenſis) curva O G O *Ellipſis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90. XVI Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) ſit etiam alia curva V G C ad iſtam ſic relata, ut à deſignato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, ſit E G æqualis ipſi Z F; ſit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; ſumatúrque Q R æqualis ipſi Z E; connexa recta G R ipſi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipſam F Q perpendicularis, ſeu curvam AFB tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G O ſecet punctis H, K, O) connexâque Z K, ſit H O = Z K; tum
(a) Hyp. ductâ Z I, quoniam H K (a) $\sqsubset$ H I, erit Z K $\sqsubset$ Z I, vel H O $\sqsubset$ H I;
(b) 25 Lect. VI quare curva O G O curvam V G C tangit. (b) Eſt autem O G O (ex oſtenſis) *Hyperbola*, cui perpendicularis eſt recta G R; eadem itaque GR curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

Fig. 91. XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad poſitione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas ſecet, ut perſpicis) connexâque rectâ D Y, ſit ſemper R Y . D Y : : D Y . E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam deſignare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O ſecet punctis G, P, O) connexâque D O ſit ſemper G O . D O : : D O . P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam ſecet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos ODP, DGP æquari; quare cùm angulus D S P major ſit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O;
(a) 12 Lect. VI. hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; eſt autem curva DYO *hyperbola* (a) ſuperiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

Not. Si curva D R S ſit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *ciſſois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis ſimiliter genitis) tangens hîc definitur.

Fig. 92. XVIII. Poſitione datæ ſint rectæ D B, B K; ſitque curva D Y X talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ D Y H (quæ rectam B K secet in H, curvam D Y X in Y) sit perpetuò subtensa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; estque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum RDY triangulo D B H simile ac æquale; quare R Y. Y D :: (D H. H B) :: Y D. Y E. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K positione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K secet in H, curvámque B X X in X) sit perpetuò H X ipsi B H æqualis; designetur oportet recta curvam B M X tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò sit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipsi B K occurrens in R; tum *asymptotis* R B, R T per X descripta censeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque projiciatur recta D N (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam O M (a) = D I) ⊐ (a) (D L (b) =) O N; ergò *hyperbola* NXN curvam BXX tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipsam curvam B X X quoque continget. a) *Constr.* (b) *Convers.* 9, Lect. VI.

Cæterùm satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

Lect. IX.

Quod ingressi sumus iter actutùm rectà prosequemur.

I. Sint rectæ A B, V D sibi parallelæ; quas secat positione data
Fig. 94. D B; transeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad se relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, sit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine designato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) designare.

(a) 12. Lect. VII. Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (*a*) explicuimus supra) exponentes; fiátque N . M : : D S . D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

Nam utcúnque ducta sit recta P G, dictas lineas secans, utì cernis:
(b) 11. Lect. VII. Estque F G . E G (*b*) : : N . M : : (*c*) D S . D T : : (*d*) L G . K G;
(c) Constr. cùm ergò (*e*) sit K G $\sqsupset$ E G; erit L G $\sqsupset$ F G; unde liquet rectam
(d) 3. Lect. 7. T B extra curvam F B F totam consistere.
(e) Hyp.

II. Reliquis perstantibus iisdem, sit jam PF inter PG, PE media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

(a) 17. Lect. 7. Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo constructæ lineæ sese mutuò (*a*) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è sex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S . D T : : 3 . 7.

Fig. 95. III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypothesi, sumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta simili pacto designatur.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipsam D B parallela, secans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N . M : :

M : : PX . PY ; connectatúrque recta FY ; hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E transiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectásque C E, V P in I ac Q secante) sit semper Q H inter Q I, Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam constat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (*a*) analoga est curva F B F ; (*b*) ergò recta F Y curvam F B F quoque continget. *a* 7. Lect. 7. *b* 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, posito lineam E B E rectam esse, quòd linea FBF parabolarum seu paraboliformium aliqua sit. quare quod de his passim observatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, nescio tamen an uspiam Geometricè ostensum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas se diffundente.

V. Hinc apertè consectatur ; si T D sit recta, síntque duæ quædam curvæ E E E, F F F ità ad se relatæ, ut ductis rectis P E F ad positione datam B D parallelis, sint ordinatæ P E semper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejusdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas hasce contingant ; erit T P = 2 S P ; Quòd si ordinatæ PE se habeant ut ipsarum PF cubi, erit TP = 3 S P ; si P E sint ut quadrato quadrata ipsarum P F, erit T P = 4 S P ; ac sic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D, radius D B, item lineæ E B E, F B F per B transeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, sit semper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B F tangentem (ad B) designare. Fig. 97.

Hoc (certè (*a*) generatim quadantenus præstitum) è re fuerit hîc speciatim apertiùs atque pleniùs exequi : Quorsum sit D Q ad D B perpendicularis, quam secet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget. *a* 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B *circulum* A B G ; secentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ità ut sit D S . D X : : M . N : : B S . B Y ; pérque puncta X, Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum *asymptotis* Y C Z per B traducta concipiatur *hyperbola* L B L ; porrò ex D projiciatur utcunque recta D P dictas lineas Fig. 97.

inter-

a Converſ. 4. Lect. VI. b 11. Lect. VII. c 1. Lect. VII. d Conſtr.

interſecans, ut expreſſum vides; eſtque jam PK.PL :: (a) M.N :: (b) GE.GF (c) ⊏ PE.PF ⊏ PK.PF; quare PL ⊐ PF; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R; eſtque tum RZ. ZB :: BS.ST. unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS.SX :: (d) BS.SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX. vel RZ.CX :: DS.ST; compoſitéque RZ. RZ + CX :: DS.DT :: (d) N.M :: CZ. CZ + CX. itaque diviſim eſt RZ.CX :: CZ.CX. adeóque RZ = CZ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media ſtatuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmeticè Geometricéque* proportionalibus efformatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X; fiat etiam DX.DY :: N.M; & connectatur EY; ipſi demùm EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

a 9. Lect. VII. b 7. Lect. VIII.

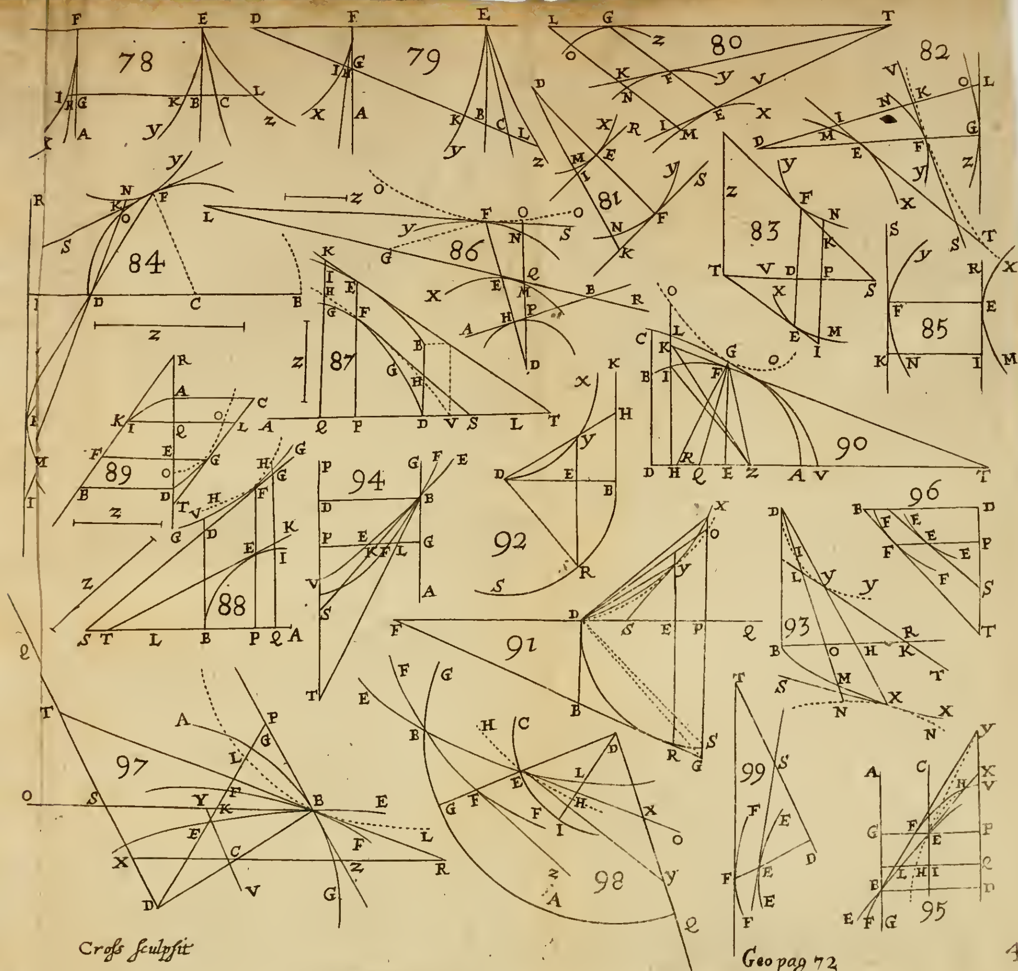
Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit pepertuò DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget; verùm ipſi HEH (a) analoga eſt curva FBF; (b) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99.

IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipſas

DEF



Cross sculpsit

Geo pag 72

4

D E F concurrentes punctis S, T; erit semper $DT = 2 DS$. Quòd si D E sunt ut cubi ipsarum D F, erit semper $DT = 3 DS$; ac simili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ V D, T B concurrentes in T, quas decusset positione data recta D B; transeant etiam per B lineæ E B E, F B F tales, ut ductâ quâcunque P G ad D B parallelâ, sit perpetuò P F eodem ordine media Arithmeticè inter P G, P E; tangat autem B R curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis N M (ordinum in quibus sunt P F, P E exponentibus) fiat $N \times TD \left.\begin{matrix} + M \\ - N \end{matrix}\right\} \times RD . M \times TD :: RD . SD$; & connectatur B S; hæc curvam F B F continget.

Nam utcunque ducta sit P G, dictas lineas secans ut vides. Estque $EG . FG :: $ (a) $M . N$. ergò $FG \times TD . EG \times TD :: N \times TD . M \times TD$. Item $EF \times RD . EG \times TD :: M - N \times RD . M \times TD$. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit $FG \times TD + EF \times RD . EG \times TD :: N \times TD + M - N \times RD . M \times TD$; (hoc est) $::$ (b) $RD . SD$. (c) Est autem $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. quare $FG \times TD + EF \times RD . EG \times TD :: LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD$. hinc, cùm sit EG (d) $\sqsubset KG$; erit $FG \times TD + EF \times RD \sqsubset LG \times TD + KL \times RD$; vel $FG . EF + TD . RD \sqsubset LG . KL + TD . RD$; seu (demptâ communi ratione) $FG . EF \sqsubset LG . KL$. vel componendo $EG . EF \sqsubset KG . KL$ (e) $\sqsubset EG . EL$. unde est $EF \sqsupset EL$. itaque punctum L extra curvam F B F situm est; adeoque liquet Propositum.

(a) 11. Lect. VII.

(b) Constr.

(c) 4. Lect. VII.

(d) Hyp.

(e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis stantibus iisdem, si P F supponatur ejusdem ordinis Geometricè media liquet (planè sicut in modò præcedentibus) eandem B S curvam F B F contingere.

Exemplum. Si P F sit è sex mediis tertia, seu $M = 7$; & $N = 3$; erit $3 TD + 4 RD . 7 MD :: RD . SD$; vel $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva F B F puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem consimili pacto designari. Nempe per F ducatur recta P G ad D B parallela, secans curvam E B E ad E; & per E ducatur E R curvam E B E tangens; fiátque $N \times TP \left.\begin{matrix} + M \\ - N \end{matrix}\right\} \times RP$. Fig. 101.

$M \times TP :: RP . SP$; & connectatur SF; hæc curvam FBF tanget; id quod omnino ſimili diſcurſu demonſtratur, quo tertia hujus; tantùm hîc (non per E ad VD parallela ducitur, at) connectitur ET; & loco ſeptimæ allegatur octava ſeptimæ Lectionis. quid plura?

XIII. Adnotetur, ſi linea EBE ſit recta, (rectæ nempe BR coincidens) eſſe lineam FBF ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diverſi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi ſumus.

XIV. Quòd ſi puncta T, R non ad eaſdem partes puncti D (vel P) cadant; curvæ FBF tangens (BS) deſignatur faciendo

Fig. 102. $N \times RD - \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD . M \times TD :: RD . SD$.

Simili planè diſcurſu conſtat hoc, tantùm (quartæ loco) ſeptimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedum *Ellipſoidum* omnium (poſito nempe lineam EBE rectam eſſe, lineæ BR coincidentem) aſt aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

Exemplum. Si PF ſit è quatuor mediis quarta, ſeu $M = 5$; & $N = 4$; erit $SD = \frac{5 TD \times RD}{4 RD - TD}$.

Notetur; Si contigerit eſſe $ND \times RD = \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD$, eſſe DS infinitam; ſeu BS ipſi VD parallelam. Alia poſſent adnotari; ſed relinquo.

XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Ciſſois* &

Fig. 103. *Ciſſoidalium* omne genus comprehenditur: Sit utique ſemirectus angulus DSB; curvæque duæ SGB, SEE ſic ad ſe referantur, ut ductâ liberè rectâ GE ad BD parallelâ, (quæ lineas expoſitas, ut conſpicis, ſecet) ſint PG, PF, PE continuè proportionales; tangat autem recta GT curvam SGB in G, reperietur quæ ad E lineam SEB tangit, faciendo $2TP - SP . TP :: SP . RP$; utique connexa RE curvam SEE tanget. Id quod è præmiſſis facilè colligitur. Quòd ſi jam curva SGB ſit circulus, & applicationis angulus SPG ſit

ſit rectus, erit curva S E E *Ciſſois vulgaris*, ſeu *Dioclea*; alioquin alterius generis *Ciſſoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perſtringo. Neq; jam amplius vos detinebo.

LECT. X.

INſtitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I ſic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad poſitione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G ſecet in E, curvámque A F I in F) ſit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G in E, ſitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propoſitas ſecans, ut cernis; éſtque G K = G H + H K = G H + H T (*a*) ⊏ arc. A G = G I; unde punctum K extra curvam A F I ſitum eſt; adeóque recta T K ipſam tangit. (*a*) 22 Lect. VII.

II. Quòd ſi recta E F quamlibet ad arcum A E rationem ſemper eandem habeat, nihilo ſeciùs recta F T curvam A F I tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis ſexta manifeſtæ conſectatur.

Hæc antea pridem aliter oſtendimus; aſt hæc demonſtratio ſimplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam inſinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam A G E, punctúmque deſignatum D; ſit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, ſit ſemper intercepta E F par arcui A E; tangátque recta E T curvam A G E; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) deſignare. Fig. 105.

Fiat T E = arc. A E; ſitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F ſecet in K, rectámque T E in H)

(*a*) 17. Lect. VIII. ſit ſemper HK = HT; tum curvam TKF (*a*) tangat recta FS in F; hæc curvam AIF quoque continget.

(*a*) 22. Lect. VII. Eſt enim GK = GH + HK = GH + HT (*a*) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

IV. Quòd ſi recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque ſtatuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106. V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad ſe relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, ſecet) ſit ſemper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; ſumatúrque ET par arcui EA; & ſit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

(*a*) 22. Lect. VII. (*b*) 26. Lect. VI. * Hyp. (*c*) 3 Lect. VIII. (*d*) 2. Lect. VIII. Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L ſecet) ſit perpetuò recta PL æqualis ipſis TH, HG ſimul; eſt itaque PL (*a*) $\sqsubset$ arc. AEG* = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (*b*) æquatur rectæ TH; (*c*) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (*d*) quare curvam AFI tanget recta.

VI. Etiam ſi rectæ DE ad arcus AE quamlibet ſemper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & ſexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107. VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità verſus ſe relatæ ſint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, ſit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; deſignanda jam eſt recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

(*a*) 16. Lect. VIII. Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H ſecet) ſit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (*a*) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(*b*) 22. Lect. VII. (*c*) Hyp. (*d*) 4. Lect. VIII. Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE ſecet in H, curvam LFL in L) ſit ſemper DL = TH + HG; eſt itaque DL (*b*) $\sqsubset$ arc. AG (*c*) = DI; (*d*) itaque curvæ DIF, LFL ſeſe (*b*) contingent. item curvæ KFK,

LFK

LFK sese contingunt. (*e*) quare curvæ D I F, K F K se quoque contingent. (*e*) ergò denique recta F S curvam D I F continget. (*e*) 2. Lect. VIII.

VIII. Quòd si rectæ D F quamvis aliam constanter eandem ad arcus A E rationem obtinuerint, itidem designari potest recta curvam D I F tangens, ex hac, & septima octavæ Lectionis; erit utique tangens ista huic F S parallela.

IX. Hinc nedum *spiralis circularis*, ast innumerabilium simili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam A E H, recta A D (in qua determinatum punctum D) recta D H positione data; sit item curva A G B talis, ut in hac assumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ D G E (quæ curvam A E H secet in E) ductâque G F ad D H parallelâ habeant A E, A F assignatam rationem X ad Y; tangat autem recta E T curvam A E H; recta designetur oportet, quæ curvam A G B ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta E V æqualis arcui E A; & concipiatur curva O G O talis, ut projectâ quâcunque rectâ D O L (quæ curvam O G O secet puncto O, rectam E T in L) ductâque O Q ad G F parallelâ, sit V L . A Q : : X . Y; estque curva O G O (è supra monstratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta G S; etiam recta G S curvam A G B continget.

Nam concipiatur altera curva N G N talis, ut cùm hanc secet recta arbitraria D L in N, curvam A E H in K, rectam T E in L; ductáq; sit N R ad G F parallela, sit V L + L K . A R : : X . Y; manifestum est curvam N G N utramque curvam A G B, & O G O tangere. [secet enim recta D L curvam A E B in I, ducatúrque I P ad G F parallela; quum ergò sit V L + L K . A R : : X . Y : : A K . A P, & sit V L + L K ⊏ A K; erit A R ⊏ A P; vel D R ⊐ D P; adeóque D N ⊐ D I; unde punctum N intra curvam A G B semper cadet; ac proinde curva N G N curvam A G B tanget; similique planè discursu curva N G N curvam O G O continget.] Itaque curvæ A G B, O G O sese (æquipollentèr) tangunt. Quare cùm recta G S curvam O G O tangat; eadem curvam A G B quoque continget: Q. E. F.

Si curva A E H sit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva A G B *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium simili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto designatur,

Hujusmodi

Hujusmodi plura quædam cogitaram hîc inserere; verùm hæc existimo sufficere subindicando modo, juxta quem, citra *Calculi molestiam, curvarum tangentes* exquirere licet, unáque constructiones demonstrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aspernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque crescant; sit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* secet punctis E, F, ipsam V D in D) sit semper *rectangulum* ex D F, & designatâ quâdam R æquale *spatio* respectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò supra punctum F, versus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expositas secent, ut vides) éstque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Est autem (ex præstituta linearum istarum natura) L F × R æquale spatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde est L K ⊐ D P; vel L K ⊐ LI.

Fig. 110.

Rursus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; simílique jam planè discursu constabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (seu extra) curvam V I F I existere.

Iisdem quoad cætera positis, si *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decrescant, eadem conclusio simili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Discrimen*, quòd in hoc casu (contra quàm in priore) linea V I F concavas suas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari spatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ta relatæ, ut ad communem ipsarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, sit semper quadratum ex D E æquale *duplo spatio* V D E Z; sumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F transiens, talis qualem mox attigimus (cujus scilicet ad V D applicatæ se habeant ut spatia VDEZ; hoc est ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præsente hypothesi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tangat recta F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = VDEZ. ergò D E × S D = (2 V D E Z =) F Dq. unde constat angulum Q F S rectum esse. quod Propositum erat. (a) 5. Lect. IX. (b) Cor. prac.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, DE, &c. ab initio D A continuò decrescant) tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget. Fig. 112.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta DKG; & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde E X versus A intra curvam E G A cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob T D . D E :: R L . L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 GDE ⊏ 2 D E X = E X × D E. ergò R L ⊏ E X ⊏ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⊏ D L = D K; ergò magìs punctum R est extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rursus punctum G infra punctum E, versus Z; estque rursus, utì priùs, R L × D E = 2 G D E ⊐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⊐ E X ⊐ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G; & fiat D G . D K :: R . P; sumatúrque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper D O × P æqualis spatio A D N; erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M . D O :: P . R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rùm ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe D G q . D K q : : 2 R . D S .

Nam eſt D G q . D K q = D G . D K + D G . D K = R . P + D T . D S = R . P + 2 P . D S = 2 R P . P × D S = 2 R . D S . itaque D G q . D K Q : : 2 R . D S.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modo demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedæa*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema* :

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum
Fig. 114. hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K. D G : : D G . D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu D K) ſe habeant in eadem quâ ſpatia A D G ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant âutem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) D G q. D K q : : $\frac{DK}{2}$. D T. hoc eſt D H . D K : : $\frac{DK}{2}$ D T; hoc eſt (quo-
* In 12. hujus. niam è * mox præmonſtratis D S = 2 D T) D H . D K : : ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$: :) D K . D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M,

rectam A P secare ad T; ut ipsius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum statuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P $= m$; P T $= t$; M R $= a$; N R $= e$; reliquásque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo; ipsas autem M R, N R (& mediantibus illis ipsas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Post *æquationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constántes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur a, vel e. (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro a ipsam m; (vel M P) pro e ipsam t (vel *P T*) substituo. Hinc demùm ipsius P T quantitas dignoscetur.

Quòd si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula ritè sumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis Exemplis clariùs elucescent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus sit; & sit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H secet in K, curvam A M O in M, sit semper subtensa A M æqualis abscissæ B K; hujus curvæ ad M tangens est designanda. Fig. 116.

Fiant quæ suprà præscripta sunt, & (ductâ A N L) nominetur A B $= r$; & A P $= q$; unde A Q $= q - e$; item Q N $= m - a$. ergò est $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma =$ (A Q q + Q N q = A N q =) B L q; hoc est (rejectis, uti monitum est, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma =$ B L q. Porrò est A Q . Q N :: A B . B L; hoc est $q - e . m - a :: r .$ B L $= \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe.} =$ B L q; seu (rejectis superfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} =$ B L q $= qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc est (abjectis iis, quæ præscripsimus

abjicienda) $= 2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò substituendo m pro a, & t pro e, est $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta E A (positione ac magnitudine data) & curva E M O proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ M P ad E A perpendiculari *Summa Cuborum* ex A P, & M P æquetur *Cubo* rectæ A E.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & AQ cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (seu abjectis superfluis, ex præscripto) $= f^3 + 3ffe$. Item N Q cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc est) $= m^3 - 3mma$. Quapropter est $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (A Q cub. + N Q cub. = A E cub. =) r^3. abjectísque datis, est $3ffe - 3mma = o$. seu, $ffe = mma$; subrogatísque loco a, & e ipsis m, & t, erit $fft = m^3$; seu $t = \frac{m^3}{ff}$; est ergò P T quarta proportionalis in ratione A P ad P M continuata.

Similiter, Si fuerit $APqq + MPqq = AEqq$; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel P M quarta proportionalis in ratione A P ad P M; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* istis lineis an observatu dignum sit nescio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Positione data sit recta A Z, & A X magnitudine; sit etiam *curva* A M O talis, ut ductâ utcunque rectâ M P ad A Z normali, sit A P *cub.* + P M *cub.* = A X × A P × P M.

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & A Q *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & Q N *cub.* $= m^3 - 3mma$. & A Q × Q N $= fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde A X × A Q × Q N $= bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; seu amoliendo reje-

ctanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; substituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; seu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductísque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus $CB = p$; radius $AC = r$; recta $AP = f$; $AM = k$. Estque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE. Fig. 119.

hoc est, $r . p :: a . \frac{pa}{r} =$ arc. FE. & AM. MP :: AE. EK; hoc est, $k . m :: r . \frac{rm}{k} =$ EK; item AE. EK :: arc. FE. LK. hoc est $r . \frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r} . \frac{pma}{rk} =$ LK. Verùm AM. AE :: AP. AK; hoc est $k . r :: f . \frac{rf}{k} =$ AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk} =$ AL. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis superfluis) $=$ ALq; adeóque LFq $=$

$$\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa.}{kk}$$

Est autem AQq. QNq :: ALq. LFq; hoc est $Q : f - e . Q : m + a ::$ ALq. LFq. hoc est $ff - 2fe . mm + 2ma :: rrff - 2fmpa . rrmm + 2fmpa$. Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; seu $kkpa - rrfa = rrme$; vel substituendo juxta *præscriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur esse rectam AT $= \frac{kk}{rr}p$; hoc est (quoniam, ut notum est, AV $= \frac{rr}{p}$) erit AT $= \frac{\text{AMq}}{\text{AV}}$; seu, AV. AM :: AM. AT.

Exemp. V.

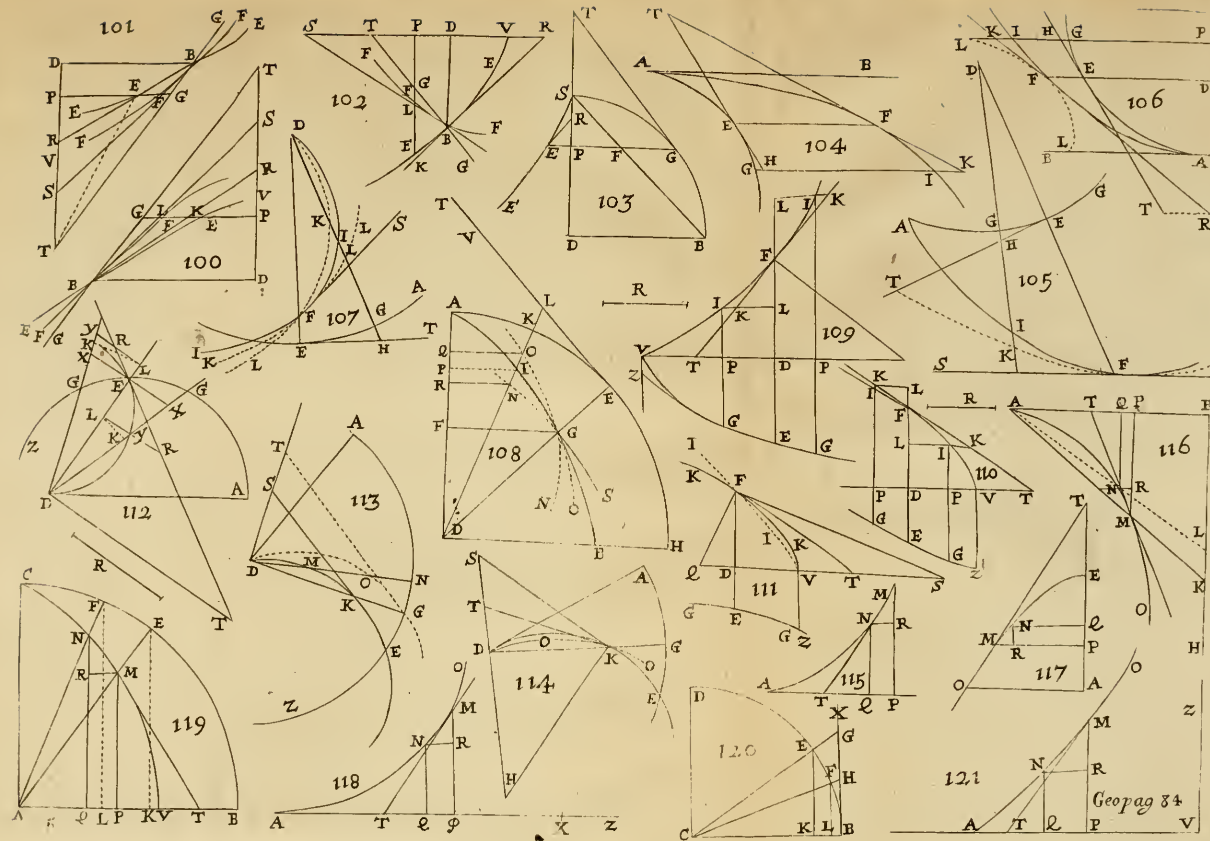
Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque sumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectáque P M ad A V normali, sit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H; demissis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B = r. C K = f: K E = g. Et quoniam est C E . E K :: arc. E F . L K; vel C E . E K :: Q F . L K; hoc est $r . g :: e . \frac{ge}{r} =$ L K; erit C L $= f + \frac{ge}{r}$. Et L F $= \sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Est autem C L . L F :: (C B . B H ::) C B . Q N. hoc est, $f + \frac{ge}{r} . \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} . gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimissis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde substituendo, est $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. seu (quoniam est $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CBq}{CGq}BG=$ $\frac{CKq}{CEq}$ B G.

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.


101
102
103
104
106
100
107
105
109
108
112
113
110
116
111
117
114
115
119
118
120
121
Geo pag 84

LECT. XI.

RElíquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (seu è perpendicularibus ad curvas) *Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata* ; de compluribus utiq; selectiora quædam.

I. Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea φ Z ψ talis, ut si à curvæ puncto liberè sumpto (puta E) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, & recta EAZ ad axem perpenicularis, sit recta AZ interceptæ A P æqualis; erit *spatium* A D ψ φ *æqualis semissi quadrati* ex recta D H. Fig. 122.

Nam sit angulus H D O semirectus ; & æquisecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C ; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ ; curvæ occurrentes in E, F, G ; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur ; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares sint ; lineæ verò se intersecent ; ut vides. Estque triangulum H L G simile triangulo P D H (nam ob indefinitam sectionem curvula G H pro rectâ haberi potest) quare HL . LG : : P D . D H . adeóque H L × D H = L G × P D ; hoc est H L × H O = D C × D ψ. Simili monstrabitur discursu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G assimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z ; & similiter K I × K Y = B A × B Z ; itidem denuò I D × I Y = A V × A Z ; unde constat triangulum H D O (quod à rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari spatio V D ψ φ (quod itidem à rectangulis D C × D ψ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt) ; hoc est $\frac{DHq}{2}$ æquari spatio V D ψ φ.

Longior discursus apagogicus adhiberi possit, at quorsum ?

II. Iisdem

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* AZ × AE + BZ × BF + CZ × CG, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex base DH. Fig. 122.

Nam ob HL . LG :: PD . DH :: PD × DH . DHq; erit HL × DHq = LG × PD × DH. hoc est HL × HOq = DC × D↓ × DH. Similique discursu, LK × LYq = CB × CZ × CG. & KI × KYq = BA × BZ × BF, *&c.* Verùm HL × HOq + LK × LYq + KI × KYq, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam AZ × AEq + BZ × BFq + CZ × CGq, *&c.* æquari τῷ $\frac{DHqq}{4}$; & esse summam AZ × AE cub. + BZ × BE cub. + CZ × CG cub. *&c.* = $\frac{DH^5}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit VD↓φ spatium quodlibet; cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia VAZφ, VBZφ, VCZφ, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii VD↓φ semiquadrato. Fig. 122.

Nam (utì priùs ostensum) figuræ VD↓φ adaptari potest spatium VDH; tale nimirum, ut ductâ quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium VAZφ = $\frac{AEq}{2}$; & VBZφ = $\frac{BFq}{2}$; & VCZφ = $\frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia VAZφ × AZ + VBZφ × BZ + VCZφ × CZ, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ}{2}$ (*c*) hoc est τῷ $\frac{DHqq}{4 \times 2}$; (*b*) hoc est τῷ $\frac{VD↓φ \times VD↓φ}{2}$.

Præced. Lect. X. (*b*) 1 *hujus.* Fig. 122. (*c*) 3 *hujus.*

V. Quòd si ducantur omnia √VAZφ, √VBZφ, √VCZφ, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio VD↓φ cubato (τῷ $\frac{2}{3}$ √VD↓φ³.)

Nam adaptatâ curvâ VH, est √VAZφ = AE √$\frac{1}{2}$; & √VBZφ = BF √$\frac{1}{2}$, & VCZφ = √CG √$\frac{1}{2}$, *&c.* Cùm itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, &c. $= \frac{DH \text{ cub.}}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \frac{DH \text{ cub}}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Est autem $DHq = 2 VD\psi\varphi$, vel $DH^6 = 8 VD\psi\varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \sqrt{\frac{8}{18} VD\psi\varphi^3} = \frac{2}{3}\sqrt{VD\psi\varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD\psi$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) segmenta VAZ, VBZ, VCZ, &c. in sinus rectos AZ, BZ, CZ, &c. ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, &c. $= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{8}}$.

Si $VD\psi$ sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit $\frac{2}{9} VDq \times A\psi q$; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{27} VD^3} \times D\psi^3 \sqrt{\frac{32}{243} VD^3 \times D\psi^3}$.

Similia plura de factis è *segmentorum potestatibus, aut radicibus aliis in applicatas, aut sinus ductis*, hinc extundi possent.

VII. E dictis porrò sequitur, si omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per respectiva puncta A, B, C, &c. Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, &c. respectivis VP æquentur; erit è sic applicatis *constitutum spatium* $AD\xi\theta$ *æquale semisse quadrati ex subtensa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, &c. $= \frac{VDq}{2}$; & omnes $AP + BP + CP$ &c. $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, si (positis iisdem) sit curva RXXS talis, ut sit IX = AP, & KX = BP; & LX = CP, &c. erit *solidum factum ex*

spatio

spatio V D ♃ ♀ *circa axem* V D *rotato subduplum solidi ex spatio* D R S H, *itidem circa axem* V D *rotato, confecti*.

Nam ob H L . L G :: P D . D H :: D ♃ . D H :: D ♃ *q* . D ♃ × D H :: D ♃ *q* . H S × D H; erit H L × H S × D H = L G × D ♃ *q*. = D C × D ♃ *q*. Simili planè discursu erit L K × L X × D L = C B × C Z *q*; & K I × K X × D K = B A × B Z *q*, &c. atqui solidum prius est $\frac{\varpi}{\delta}$: A Z *q* + B Z *q* + C Z *q*, &c. & solidum posterius est $\frac{2\varpi}{\delta}$: D I × I X + D K × K X + D L × L X, &c. itaque constat Propositum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia simili ratione vera sunt, etiam si curva VEH rectæ V D convexas suas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto E; & per hoc ductâ E P ad curvam V E H perpendiculari, & E A Y ad rectam V D normali, factáque A Z = A P; erit spatium V D ♃ = $\frac{DHq}{2}$; Sin quoque fiat A Y = V P; erit spatium V D ξ = $\frac{VHq}{2}$. Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipsarum immediatè constructione) *dimensiones innotescant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rursus curva quæpiam V H (cujus axis V D, basis D H) & linea D Z Z O talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ E T, quæ curvam tangat, & rectâ E I Z ad basin parallelâ, sit qerpetuò I Z æqualis ipsi A T; dico *spatium* D H O *spatio* V D H *æquari*.

Æquisecetur enim recta D H indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ E I Z, F K Z, G L Z ad V D parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ E A, F B, G C ad H D parallelæ, rectæque E T, F T, G T (ut & H T) *curvam tangentes*; lineæ verò se, ut Schema monstrat, intersecent. Estque jam triangulum G L H simile triangulo T D H (nam ob divisionem istam indefinitam arculus G H rectæ instar censeri potest, eatenus tangenti H T coincidens) quare L G . L H :: T D . D H; & L G × D H = L H × T D; seu C D × D H = L H × H O. simili ratiocinio est B C × C G

$CG = KL \times LZ$; & $AB \times BF = IK \times KZ$, & $VA \times AE = DI \times IZ$. Verùm summa $CD \times DH + BC \times CG + AB \times BF + VA \times AE$ à spatio VDH minimè differt; & summa $LH \times DO + KL \times LZ + IK \times KZ + DI \times IZ$ à spatio DHO minimè differt. itaque spatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

XI. Iisdem positis; solidum ex spatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit solidi facti ex spatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam est $HL \,.\, LG :: (DH \,.\, DT :: DH \,.\, HO ::)\; DHq \,.\, DH \times HO$. unde $HL \times DH \times HO = LG \times DHq = CD \times DHq$. Similique discursu sunt $LK \times DL \times LZ = BC \times CGq$. & $KI \times DK \times KZ = AB \times BFq$. & demum $ID \times DI \times IZ = VA \times AEq$. Est autem (ut vulgò notatum habetur) summa $CD \times DHq + BCB \times CGq + AB \times BFq + VA \times AEq$ dupla summæ $DI \times IE + DK \times KF + DL \times LG$, *&c.* Quare solidum ex spatio HDO circa axem DR converso factum duplum est solidi, quod è spatio VDH circa VD converso producitur.

XII. Hinc, summa $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, &c. æquatur summæ quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis $AEq + BFq + CGq$, &c.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, &c. triplam esse summæ $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, &c. hòc est æqualem summæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

XIV. Iisdem positis; si DXH sit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, sit media proportionalis inter sibi congruas ordinatas IE, IZ; erit solidum ex spatio VDH circa axem DH rotato duplum solidi ex spatio DXH circa eundem axem DH converso procreati.

Nam ob $VA \times AE = DI \times IZ$, erit $VA \times AE \times EI = DI \times IZ \times IE = ID \times IXq$. Similique de causa $AB \times BF \times FK = IK \times KXq$; & $BC \times CG \times GL = KL \times LXq$, &c. Est autem summa $VA \times AE \times EI + AB \times BF \times FK + BC \times CG \times GL$, &c. Subdupla sum- *In 10. hujus.*

mæ $VDq + EIq + FKq + GLq$; ergò ſumma $IXq + KXq + LXq + HXq$, ſubdupla eſt ſummæ $VDq + EIq + FKq + GLq$. Vnde liquet Propoſitum.

XV. Quòd ſi curva DXH talis concipiatur, ut ſit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit ſumma cuborum ex IX, KX, LX, &c. ſubtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX ſit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq, \&c. = \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras poteſtates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima eſt, &c.

Hæc ſimili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζιν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipſi AT; & ordinata BY ipſi BT, &c. æquentur; erit $IZq + KZq + LZq$, &c. (ſumma quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis ſummæ $VA \times AE \times AY + AB \times BF \times BY + BC \times CG \times CY$, &c. (hoc eſt figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, ſumma IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. = $VA \times AE \times AYq + AB \times BE \times BYq + BC \times CG \times CYq$, &c. *hoc eſt figura* VDH *in figura* VDQ *quadrata ducta*). Similis & aliarum *poteſtatum* eſt ratio.

Ad ſuperiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera ſunt, & omnino ſimili ratione comprobantur,
Fig. 126. Etiam ſi curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, ſi linea DZO talis ſit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, ſit perpetim IZ = AT; erit ſpatium DHO ſpatio VDH æquale; & ſolidum factum ex ſpatio DHO circa axem VR converſo duplum erit ſolidi ex ſpatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX Porrò, ſit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia ſit linea KZL talis, ut ſumpto in cur-
Fig. 127. va AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL ſecet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; ſit TF. FM ::

R.

R . F Z; erit ſpatium A D L K æquale rectangulo ex R, & D B.

Nam ſit D H = R; & compleatur rectangulum B D H I; tum aſſumptâ M N indefinitè parvâ curvæ A B particulâ ducantur N G ad B D; & M E X, N O S ad A D parallelæ. Eſtque N O . M O :: T F . F M :: R . F Z. Unde N O × F Z = M O × R; hoc eſt F G × F Z = E S × E X. ergò cum omnia rectangula F G × F Z minimè differant à ſpatio A D L K; & omnia totidem rectangula E S × E X componant rectangulum D H I B, ſatìs liquet Propoſitum.

XX. Iiſdem poſitis, ſit curva P Y Q talis, ut ſumpta in ſumpta rectа M X ordinata E Y (reſpectivæ) ipſi F Z æquetur, erit *ſumma quadratorum* ex F Z (ad rectam A D computata) par ei quod fit ex ipſa R in *ſpatium* D B Q B ducta.

Eſt enim F G . E S :: N O . M O :: R × F Z . F Z q :: R × E Y . F Z q. adeóque F G × F Z q = E S × R × E Y.

XXI. Simili ratione *ſumma Cuborum* ex F Z æquatur ei quod fit ex R in ſummam quadratorum ex rectis E Y ad B D applicatis. neque non ſimili quoad reliquas poteſtates tenore.

XXII. Sit curva quævis D O K, in qua deſignatum punctum D; & ſubtenſa recta D K; ſit item curva A E talis, ut à D projectâ quâvis rectâ D M F (quæ curvas ſecet punctis M, F) ductíſque D S ad D M normali, & M S curvam D O K tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, ſit D S . 2 R :: D M q . D F q; erit ſpatium A D E æquale ex R, D K. Fig. 128.

Nam ſubtenſa D K indefinitè ſecta concipiatur punctis P Q, &c. per quæ centro C deſcripti tranſeant arcus P M, Q R N; curvam D O K ſecantes punctis M, N; per quæ ducantur rectæ D M F, D N G; ſint verò D T ad D K; & D S ad D M perpendiculares; quibus occurrant tangentes K T, M S. demùm centro D per E ducatur arcus E X; & per F arcus F Y. Jam, ob ſectionem indefinitam, eſt triangulum K P M triangulo K D T ſimile. ac ideò M P . P K :: T D . D K. item eſt D P . P M :: D E . E X. ſeu, propter aſſignatam cauſam, D K . M P :: D E . E X. Eſt itaque M P × D K . P K × M P :: T D × D E . D K × E X. hoc eſt D K . P K :: T D × D E q. D K × E X × D E. ac inde D K q × E X × D E = P K × T D × D E q. (*a*) Eſt autem D T . 2 R :: D K q . D E q; ſeu D T × D E q = 2 R × D K q. ergò eſt D K q × E X × D E = P K × 2 R × D K q. quare E X × D E = 2 R × P K; hoc eſt, 2 ſector D E X = 2 R × P K. unde ſector D E X = R × P K. Simili planè diſcurſu ſector D F Y (*a*) Hyp.

æquatur ipsi R × RM, vel R × QP. itaque totum spatium ADE quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propositum.

Fig. 128. XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut sit DE = √DK × DH; & DF = √DM × DI; ac ità perpetuò; erit spatium ADE quadrati ex DK subquadruplum.

Nam est MP. PK :: DK. DH :: DKq. DK × DH :: DKq. DEq. item DP. PM :: DE. EX; hoc est DK. PM :: DE. EX. ergò MP × DK. PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc est DK. PK :: DKq. DE × EX. vel DKq. DK × PK :: DKq. DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c. æquantur semissi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo spatio* EDA; unde manifeste consequitur Propositum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique subtendatur recta DK; sit item curva DZI talis, ut sumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; sumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, sit PZ = DS; erit *spatium* DKI æquale *duplo spatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipsi DK perpendicularis sit, & KT curvam DOK tangat. Est itaque (ducto arcu MP) rursus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem secet subtensa DM in R; est ergò rursus MR. RN :: MD. DS; hoc est PQ. RN :: MD. PZ quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc est spatium DKI duplo spatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipsis MS respectivis; & ad rectam assumptam Xk, distantiásque Xk, Xm, Xn, &c, æquales ipsis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ *kd*, *md*, *nd*, &c.

pares

pares subtensis K D, M D, N D; &c. erit spatium X k d æquale spatio D K I.

Nam est K M . K P : : K T . K D; hoc est km . K P : : K I . kd. unde $km \times kd = KP \times KI$. Similíque pacto, M N . M R : : M S . M D . seu mn . P Q : : P Z . md . unde $mn \times md = PQ \times PZ$. ac ità deinceps. unde cònstat Propositum.

XXVI. Sin porrò, persistentibus reliquis, adsumptâ quâvis rectâ kg, completóque rectangulo X kgh, curva D Z I talis intelligatur, ut sit M D . M S : : kg . P Z; erit rectangulum X kgh æquale spatio D K I. Fig. 130.

Nam est rursus K P . K M : : K D . K T : : kg . K I. adeóque $KP \times KI = (KM \times kg =) km \times kg$. Similitérque $PQ \times PZ = mn \times kg$. ac ità semper. Unde constat.

Hinc noto spatio D K I cognoscetur quantitas curvæ D O K.

Hujusmodi verò complura deprehendet quisquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excusserit. Faciat cui id vacat & adlubescit.

XXVII. Usui fortè nonnunquam erit (mihi subinde fuit) & hoc, è præmissis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam VEH (cujus axis VD, basis DH) quam tangat utcunque recta E T; & ducatur E A ad H D parallela. tum altera statuatur curva G Z Z talis, ut à puncto E ductâ rectâ E Z ad V D parallelâ (quæ basin D H in I, curvam G Z Z in Z secet) adsumptâq; quâpiam determinatâ R, sit semper D A q . R q : : D T . I Z; erit D A . A E : : R q spat. D I Z G. (vel facto D A . R : : R . D P; ductâque P Q ad D H parallelâ, erit *Rectangulum* D P Q I par *spatio* D G Z I).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam usui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet A M B (cujus axis A D); sit item linea K Z L proprietate talis, ut sumpto in A M B quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ M P ad curvam A B perpendiculari (quæ axem A D secet in P) & rectâ M G ad A D perpendiculari (quæ curvam K Z L secet in Z) sit constantèr G M . M P : : arc A M . G Z; erit *spatium* A D K L æquale *semissi quadrati* ex arcu A M. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò sufficiat admonitum; etenim hic animus est paulò subsistere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. Cum pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii*, *Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi; quin & prætereà notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc visum est apponere.

Fig. 133. II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* B A E (cujus *Axis* A D, *Basis* vel ordinata B D E, *Tangens* B T; *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* B A E $= \frac{m}{n+m}$ A D × B E; & T D $= \frac{m}{n}$ A D, & K D $= \frac{m}{n+2m}$ AD.

Fig. 134. III. Sint duæ quævis curvæ A E B, A F B (quarum communis axis A D, ordinata D B) itâ se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ E F G ad B D parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ E S, F T tangant curvas, (illa curvam A E B, hæc ipsam

ipsam A F B) sit perpetuo T G major quàm S G; dico nullam curvæ A F B partem intra ipsam A E B cadere.

Si fieri potest, cadat pars N F M; ità scilicet ut curva A F B curvam A E B intersecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata E F G; sint verò lineæ L X K, R Y Q tales, ut ductis rectis E O, F P ad ipsas E S, F T perpendicularibus, protractâque rectâ E G, ut hæc dictas lineas L K, Q R secet punctis X, Y; sit G X = G O, & G Y = G P. Jam ex ostensis patet esse *spatium* I H K L $= \frac{HMq - INq}{2} =$ spat. IHQR; adeóq; spat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO(GX)::SG; GE. ⊐ SG. GF ⊐ TG. GF:: GF. GP (GY) ⊐ GE. GY; est G X ⊏ G Y; adeòque (cùm hoc ubique similiter contingat) spatium I H K L majus spatio IHQR; quod repugnat ostenso. itaque liquet Propositum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc usquam intersecat.

IV. Sit curva quæpiam B A E, cujus axis A D, & ad hunc ordinata basis A D E; segmenti verò B A E centrum gravitatis sit punctum H, per quod ducta sit recta R S ad B E parallela Porrò per puncta R, S transeat altera curva (vel linea quævis) M R A S N, habens itidem axin A D, ac ità priorem curvam B A E secans, ut ejusce pars superior R K A P S intra curvam B A E cadat, inferiores verò reliquæ partes R M, S N extra eandem; erit segmenti M R A S N centrum gravitatis infra punctum H, versus basin M N. Fig. 135.

Nam è segmento R I A O S ablatum R I A K + A O S P residuum B R K A P S E deprimet versus basin B E, puta ut jam sit hujus residui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum B R M + E S N adhuc totum M R K A P S N magìs deprimet; adeóque centrum ejus infra X consistet, velut ad Y. itaque constat Propositum.

V. *Circulum* A F B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, E S *Diametro* C A occurrentes punctis T, S; & ad C A perpendiculares sint rectæ B D, E P; sit autem A D major quàm A P; erit T D. AD ⊏ SP. AP. Fig. 136.

Nam est C T. C A:: C A. C D. Ideoque CT − CA. CA − CD:: CT CA; hoc est TA. AD:: CT. CA. Simili ratione constabit esse S A. AP:: CS. CA. Est autem C T. C A ⊏ C S. C A. quare T A. A D ⊏ S A. A P. vel componendo T D. A D ⊏ S P. A P.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* A E B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ
Fig. 137. B T, E S, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente ; erit T D : A D $\sqsupset$ S P . A P.

Nam eſt C A . C D : : C T . C A . unde C A — C T . C D — C A : : C T . C A ; hoc eſt T A . A D : : C T . C A . ſuppare diſcurſu, eſt S A . A P : : C S . C A. Verùm eſt C T . C A $\sqsupset$ C S . C A. quare T A . A D $\sqsupset$ S A . A P ; ſeu cómponendo T D . A D $\sqsupset$ S P . A P.

VII. *Circuli* A E B (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* A F B communes ſint axis A D, & baſis B D ; ſit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & A D $= \frac{m - 2n}{m - n}$ C A (vel $m - n . m - 2n ::$ C A . A D) *circulum* verò tangat recta B T ; hæc quoque *paraboliformem* A F B continget.

Fig. 138. Nam quia BT *circulum* tangit, eſt CT . CA : : CA . CD ; unde TA . AD : : CA CD . componendóque TD . AD : : CA + CD . CD. Item, quoniam eſt (ex hypotheſi) C A . A D : : $m - n . m - 2n$; erit per rationis converſionem C A . C D : : $m - n . n$. & componendo C A + C D . C D : : $m . n$. hoc eſt T D . A D : : $m . n$. unde (*a*) palàm fit,
(*a*) 2 *hujus ap.* quòd B T *paraboliformem* A F B tangit.

VIII. Subnotetur, quòd inverſè, datâ ratione ipſius A D ad C A' deſignabitur hinc *paraboliformis* ; quæ *Circulum* A E B ad B continget. Nempe, ſi A D $= \frac{s}{t}$, erit $\frac{t - s}{2t - s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam poſito fore $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & tranſponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogiſmum redigendo) $m - n . m - 2n :: t . s ::$ C A . A D. itaque conſtat ex antecedente Propoſitum.

IX. Manente quoad cætera ſeptimæ hypotheſi, *paraboliformis* A F B extra *circulum* A E B tota cadet.

Fig. 139. Nam utcunque ducatur recta G E F ad D B parallela ; quæ ſecet circulum ad E, paraboliformem in F ; ductæque concipiantur rectæ E S *circulum*, & recta F R *paraboliformem* contingentes ; Eſtque

RG

RG . AG :: (a) m . n :: TD . AD (b) $\sqsubset$ SG . AG. quare RG $\sqsubset$ SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere. (a) 2. hujus. app. (b) 5. hujus ap. (c) 3. hujus ap.

X. Reliquis itidem ſtantibus, ſi ad baſin GE (utcunque parallelam ipſi DB) & axem AD conſtituta intelligatur *paraboliformis* ejuſdem cum ipſa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A ſupra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; eſt VP . AP $\sqsupset$ SG . AG $\sqsupset$ RG . AG :: *m* . *n*; (a) itaque rurſus liquet Propoſitum. (a) 3. hujus ap.

XI. Conſectatur etiam dictam (ipſi AFB coordinatam & ad baſin GE conſtitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* ſtatim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipſam tangens RE circulum ſecat (quia nempe SE circulum tangit) quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam poſito quòd occurrat uſpiam ad N, (a) tota ſupra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac oſtenſum eſt. (a) 3. hujus ap.

XII. Porrò, *Hyperbola* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes ſint axis AD, baſis DB; ſit autem AD $= \frac{2n - m}{m - n}$ CA; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget. Fig. 140.

Nam eſt CD.CA :: CA.CT. ac indè AD.TA :: CD.CA; inverſéq; componendo TD . AD :: CA + CD . CD. Verùm ex hypotheſi, eſt $m - n . 2n - m$ :: CA . CD; adeoque inversè componendo CA . CD :: $m - n . n$; & rurſus componendo CA + CD . CD :: *m* . *n*. hoc eſt TD . AD :: *m* . *n*. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rurſu datâ ratione ipſius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens deſignabitur. nempe ſit AD $= \frac{s}{t}$ CA; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc ſuppoſito erit (σταυρηδὸν

 mul-

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel transponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n . 2n - m :: t . s ::$ CA . AD. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Estque SG . AG :: (a) $m . n ::$ TD . AD (b) $\sqsupset$ RG . AG. unde RG $\sqsubset$ SG. (c) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

(a) 2. hujus ap.
(b) 6. hujus ap.
(c) 3. hujus ap.

XV. Etiam, si reliquis perstantibus, ad basin GE, axin AG constitutam imagineris ejusdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes

Fig. 141. ipsâ GE superiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Nam si in *curva hyperbolica* AE sumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP . AP $\sqsubset m . n$. adeoque rursus è tertia liquet Propositum.

XVI. Quinetiam si hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad basin EG constituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipsis EG, BD in-

Fig. 141. tercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipsa cum ipsius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbolæ* non occurrit, patet; quoniam

(a) 3. hujus ap. hoc posito, (a) ipsa intra *hyperbolam* AN tota consisteret, contra quàm mox ostensum est.

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & basin DB; *parabola* ad partes supra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD paralle-

Fig. 142. la, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI est *Parameter parabolæ* AFB. quòd si supra BD utcunque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum secans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet esse GEq = AG × GK $\sqsubset$ AG × DI = GFq. unde GE $\sqsubset$ GF. Item, si infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* secans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet esse MOq = AO × DI $\sqsubset$ AO × OL = NOq. & ideò MO $\sqsubset$ NO.

$\sqsubset$ N O. quare liquent ea, quæ Propoſita ſunt.

Si *Circulo* ſubſtituatur *Ellipſis*, eadem concluſio valet idem diſcurſus probat; poſitâ A H *Ellipſis parametro.*

XVIII Habeant *hyperbola* A E B (cujus axis A Z, parameter A H) & *parabola* A F B axin eundem A D, & baſin D B, *parabola* ſupra D B tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, ſi infra D B protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ Z H occurrat B D in I; ergò D I eſt *parabolæ parameter.* Quòd ſi ſupra B D utcunque ducatur recta F E G K ad B D parallela, ſecans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas A D, Z H punctis G, K, erit F G q $=$ A G $\times$ D I $\sqsubset$ A G $\times$ G K $=$ E G q. quare F G $\sqsubset$ E G. Quòd ſi infra B D, utcunque ducatur recta MNOL ſecans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas A D, Z H in O, & L, erit N O q $=$ A O $\times$ O L $\sqsubset$ A O $\times$ D I $=$ M O q. & indè N O $\sqsubset$ M O. unde conſtant ea quæ propoſita ſunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimenſionem pertinentes regulæ.* Sit B A E circuli portio, cujus axis A D, baſis B E; ſitque C centrum circuli, & E H ſinus rectus arcus B A E; item, ſit A D $=$ $\frac{s}{t}$ C A; erit Fig. 144.

1. $\frac{2t - s}{3t - 2s}$ A D $\times$ B E $\sqsubset$ port. B A E.

2. E H $+$ $\frac{4t - 2s}{3t - 2s}$ B H $\sqsubset$ arc. B A E.

3. $\frac{2}{3}$ A D $\times$ B E $\sqsupset$ port. B A E.

4. E H $+$ $\frac{4}{3}$ BH $\sqsupset$ arc. BAE.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimenſionem ſpectantes regulæ.* Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) ſegmentum A D B, habens axin A D $=$ $\frac{s}{t}$ C A; & baſin D B; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t + s}{3t + 2s}$ A D $\times$ D B $\sqsupset$ ſegm. A D B. &

2. $\frac{2}{3}$ A D $\times$ D B $\sqsubset$ ſegm. A D B.

XXI. Porrò, sit *circuli* (cujus centrum C) segmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t - s}{5t - 3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éstque punctum

(a) 2. hujus ap. H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad basin B E

(b) 8. hujus ap. constitutæ, cujus exponens $\frac{t - s}{2t - s}$ & (b) quæ proinde circulum AEB tangit; (nam si $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t - s}{5t - 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* isti coordinatæ per O, P transeuntis, & ad basin B E pertingentis. Hæc autem supra O

(c) 10. hujus ap P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipsum; (e) adeóque

(d) 11 hujus ap punctum H supra K situm est.

(e) 4. hujus ap.

Fig. 146. XXII. Sin punctum L sit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K situm; adeóque $KD \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbolæ* (cujus centrum C) *segmentum* B A E, cujus axis A D, basis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t + s}{5t + 3s} AD$; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. hujus, ap. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Estque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad basin D B constitutæ,

(b) 13. hujus ap cujus exponens $\frac{t + s}{2t + s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam si $\frac{t + s}{2t + s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t + s}{5t + 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis isti coordinatæ per O, P ductæ, & ad BE

(c) 15. hujus ap. pertingentis. hæc autem suprá O P (c) intra hyperbolam cadit;

(d) 16 hujus ap & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K supra H

(e) 4. hujus ap. existit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) supra K existit, adeóque $KD \sqsupset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè speculatio præsens, *ob hujusmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aspernanda videatur, adjungemus consectarium unum vel alterum, quibus fortè solis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima, Minimaque* sui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; sitque *segmentum* ADB; & huic adscripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$; sit item $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc est recta, cujus aliqua potestas in potestatem segmenti axis, seu AD, ducta conficit *potestatem* ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in suo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE posita concipiatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergò *paraboliformis* AFB *circulum* extrorsum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^{\underline{m}} \sqsubset GE^{\underline{m}}$; hoc est $p^{\underline{m-n}} \times AG^{\underline{n}} \sqsubset q^{\underline{m-n}} \times AG^{\underline{n}}$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum est esse $p^{\underline{2m-2n}} = ZD^{m} \times AD^{\underline{m-2n}}$. & $q^{\underline{2m-2n}} = ZG^{\underline{m}} \times AG^{\underline{m-2n}}$. unde $ZD^{\underline{m}} \times AD^{\underline{m-2n}} \sqsubset ZG^{\underline{m}} \times AG^{\underline{m-2n}}$. quare $ZD^{\underline{m}} \times AD^{\underline{m-2n}}$ est maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^4 = ZD^3 \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^2 = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^4$. vel $p^2 = ZD^{\frac{10}{7}} \times AD^{\frac{4}{7}} = ZD^3 \times BD^4$. & $AD = \frac{4}{7} CA$.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inscripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; sitque $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$; erit p sui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG constituta intelligatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrsum contingat, erit $GF^{\underline{m}} \sqsupset GE^{\underline{n}}$; hoc est $p^{\underline{m-n}} \times AG^{n} \sqsupset q^{\underline{m-n}} \times AG^{n}$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{\frac{2m-2n}{}} = \frac{ZD^{\frac{m}{}}}{AD^{\frac{2n-m}{}}}$: & $q^{\frac{2m-2n}{}} = \frac{ZG^{\frac{m}{}}}{AG^{\frac{2n-m}{}}}$ unde erit $\frac{ZD^{\frac{m}{}}}{AD^{\frac{2n-m}{}}} \sqsupset \frac{ZG^{\frac{m}{}}}{AG^{\frac{2n-m}{}}}$ quare $\frac{ZD^{\frac{m}{}}}{AD^{\frac{2n-m}{}}}$ est minimum.

Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n = 2$; & $m = 3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD} = \frac{BD^5}{AD^4}$. & $p = \frac{BD^3}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$. Item $AD = CA$.

2. Sit $n = 3$; & $m = 4$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^2}$. Item $AD = 2\,CA$.

3. Sit $n = 5$, & $m = 8$; erit $p^6 = \frac{ZD^8}{AD^2}$ vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD} = \frac{BD^8}{AD^5} = \frac{ZD^5}{BD^2}$. Item $AD = \frac{2}{3}\,CA$.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καθολικὸν:

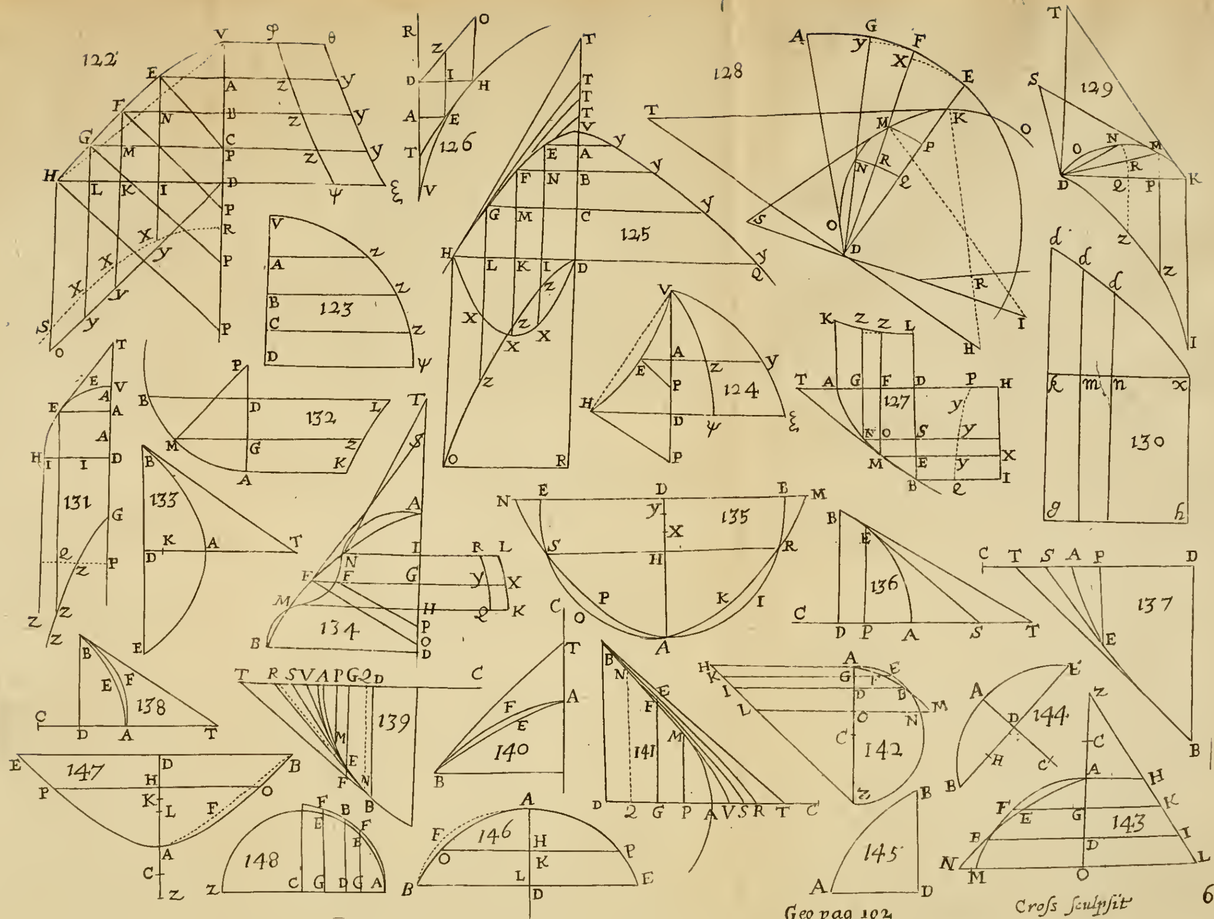
Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superiùs ostensis liquet) minor angulo NGS, unde MB . BY $\sqsubset$ GN . NS. Similíque de causa est NM . MR $\sqsubset$ GN . NS. * quare conjunctè est BM + MN + NG . BY + MR + NS $\sqsubset$ GN . NS; hoc est arc. GB . BH $\sqsubset$ GN . NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè est GN . NS $\sqsubset$ arc. AG . GE. quapropter erit GB . BH $\sqsubset$ AG . GE. permutandóque GB . AG $\sqsubset$ BH . GE. quare componendo est AB . AG $\sqsubset$ BD . GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

XXVIII.


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
Geo pag 102
Cross sculpsit
6

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* C A, & ad hunc perpendicularis recta D B E; sit item curva A N E talis, ut ductâ utcunque rectâ P M N ad D E parallelâ (quæ circulum secet in M, dictam curvam in N) sit recta P N æqualis *Arcui* A M; sit demum *axe* A D, *base* D E descripta *Parabola* A O E, hæc extra curvam A N E tota cadet. Fig. 151

Nam secet recta P N parabolam in O; & connectantur subtensæ A B, A M; estque D E . P N :: arc. A B. arc. A M ⊏ A B . A M :: D E . P O . quare P N ⊐ P O; unde liquet Propositum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *spatiorum* A D B, A D E *dimensionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{3\,CA \times DB}{2\,CA + CD}$ ⊐ arc. AB. Fig. 152.

Porrò si ponatur arc. A B = 30 grad. sitque 2 C A = 113; juxta regulam istam computando, proveniet *tota circumferentia* major quàm 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* A B, nominatísque $AB = p$; $CA = r$; & $DB = e$, ad inveniendum *sinum rectum* D B adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr + pp} = \frac{12rrp}{9rr + pp} e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr + pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

XXXI. Sit A M B *Circulus*, cujus Radius C A, & huic perpendicularis recta D B E; sit item curva A N E pars *Cycloidis* ad *Circulum* A M B pertinentis; demum ad axem A D, basin D E statuatur *Parabola* A O E; hæc intra *Cycloidem* tota cadet. Fig. 153.

Etenim utcunque ducatur recta P M O N ad D E parallela, lineas expositas secans, ut cernis; connectantúrque *subtensæ* A B, A M; estque D E . P O :: A B . A M :: curv. A E . A N ⊏ D E . P N; adeoque P O ⊐ P N. unde constat Propositum.

XXXII. Exhinc, & è *notis segmentorum circularis atque Cycloidalis dimensionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2\,CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2\,CD}$ ⊏ arc. A B.

Porrò si fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 C A = 113; è regula hac consectatur fore *totam circumferentiam* minorem quàm 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propositis duabus regulis statim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti se obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *heorema*, nescio an usPiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè scripserunt, animadversum: Completo *Rectangulo* ADEG, *spatium* AEG

AEG æquatur *Circulari segmento* ADB demonstrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH sese contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta DN M: habebit *segmentum* A I M D ad *segmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam sit A R ad AG perpendicularis, ac ipsi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducatúrque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N descripta concipiatur *Ellipsis* A L N G; hæc (uti satis manifestum) intra arcum A K N tota cadet. Est autem segm. A I M D. segm. A L N D:: D M. D N. ergo segm. A I M D. segm. A K N D ⊐ DM. DN.

Fig +154. XXXV. Sit Ellipsis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; sit item recta DC axi majori Y Z parallela; & per D, F, C transeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipsis axe minore F T situm; dico circuli partem DOFPC intra ellipsis partem DMFNC jacere.

Nam sit FI ad FV perpendicularis, & in hac sumatur FS = FV; & connectatur V S, cui DC producta occurrat in X; & connexa T X ipsi FI occurrat in R. & cum sit G D q = F G × G V = F G × GX; liquet ipsam FR esse ellipsis, axi F T congruam, parametrum; unde constat Propositum.

Fig 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, segmentum DEC, & sumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, sit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, sit R S. R M:: G E. G F; erit DMFC ellipsis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G:: G L. G H; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, sitque HY par ipsi LE; erunt HY, HF ellipsis semiaxes.

Demonstratum habetur a *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154.

Corol. Hinc segm. DEC. DMFC:: EG. FG.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC quarum communis subtensa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

Nam sint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG:: GL. GH; & fiat YHZ ad HE perpendicularis, & sit HY æqualis ipsi LE; tum semiaxibus HY, HE descripta concipiatur ellipsis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipsin DMFC circulo DOFC circumduci. Est autem circulare segmentum DEC ad segmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare segm DEC ad segm circulare DOFC. rationem habet majorem, quàm GE ad GF: Quod. E. D.

LECT.

Lect. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbíſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam $\alpha\beta$ curvæ V B, $\alpha\mu$ curvæ A M, $\mu\nu$ *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam $\alpha\beta$ applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut F Z ipſi M P, & $\mu\varphi$ ipſi M F æquentur; erit *ſpatium* $\alpha\beta\delta$ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N . N R :: P M . M F. unde $MN \times MF = NR \times PM$, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) $\mu\nu \times \mu\varphi = FG \times FZ$; ſeu rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH; ſpatium verò $\alpha\beta\delta$ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia $\mu\vartheta$; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ, Sphæroidis* utriuſque, *Conoidúmque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, à qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſtet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habet ur.

Fig. 156, 157. IV. Iisdem stantibus, sit curva A Y I talis, ut ordinata F Y sit inter congruas F M, F Z proportione media; erit *solidum* ex spatio $\alpha\delta\beta$ circa axem $\alpha\beta$ rotato factum æquale *solido*, quod à *spatio* A D I circa axem A D converso procreatur.

Nam est $MN . NR :: PM . MF :: PM \times MF . MFq :: FZ \times FM . MFq$. unde $MN \times MFq = NR \times FZ \times FM$; hoc est $\mu\nu \times \mu\phi q = NR \times FYq$. Unde liquet Propositum.

Fig. 156, 157. V. Simili ratione colligetur, si F Y ponatur inter F M, F Z *bimemedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\phi$) à curva $\alpha\phi\delta$ ad rectam $\alpha\beta$, æqualem *summæ cuborum* ex explicatis à curva AYI ad rectam A D. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

Fig. 156. VI. Porrò, stantibus reliquis, sit curva V X O talis, ut E X ipsi MP æquetur; & curva $\varpi\xi\psi$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipsi P F; erit spatium $\alpha\varpi\psi\beta$ æquale spatio D V O B.

Nam est $MN . MR :: MP . PF$; adeoque $MN \times PF = MR \times MP$. hoc est $\mu\nu \times \mu\xi = ES \times EX$. vel rectang. $ET =$ rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propositum.

Fig. 156. VII. Subnotetur hoc: Si curva A B sit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob $EXq = (PMq = PFq + FMq = \frac{Rq}{4} + FMq = \frac{Rq}{4} + DEq =) DVq + DEq$). item *spatium* $\alpha\beta\psi\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ $\mu\xi$ ipsi $\frac{R}{2}$ æquantur. Constat itaque dato *spatio hyperbolico* DVOB curvam A M B dari; & vicissim. Hoc obiter.

Fig. 157. VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam $\alpha\beta$ à curva $\varpi\xi\psi$ æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (seu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipsis $PFq \times EX$; ac ità porrò.

Fig. 157. IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) si ponatur F Z æqualis ipsi P Q, & $\mu\phi$ ipsi A Q; *spatium* $\alpha\beta\delta$ *spatio* A D L K æquari.

q Nam

Nam ob MN. NR :: PM. MF :: PQ. QA; erit MN × QA = NR × QA; hoc est rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, sintque curvæ DXO, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut EX æquetur ipsi MT, & $\mu\varphi$ ipsi MF; erit spatium $\alpha\beta\delta$ æquale *spatio* DXOB. Fig. 158.

Nam MN. MR :: MT. MF. quare MN × MF = MR × MT; 159.
hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi$ = ES × EX; unde patet.

XI. Hinc rursus, *superficies solidi ex spatii* ABD circa axem AD conversione progeniti ad *spatium* DXOB se habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium*; hoc igitur noto simul illa innotescet. unde rursus *Sphæroidum, Conoidumque superficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut sit EY = $\sqrt{}$ EX × MF; erit *solidum* ex *spatio* $\alpha\beta\delta$ circa axem $\alpha\beta$ rotato factum æquale *solido*, *quod ex spatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim est MN. MR :: MT × MF. MFq :: EX × MF. MFq :: EYq. MFq. quare MN × MFq = MR × EYq. hoc est $\mu\nu$ × $\mu\varphi$q = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque potestatum*) ex ordinatis $\mu\varphi$ *summas* cum *spatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint prætereà lineæ AZK, $\alpha\xi\psi$ tales, ut FZ ipsi MT, & $\mu\xi$ ipsi TF æquentur; *spatium* $\alpha\beta\psi$ æquabitur *spatio* ADK.

Etenim MN. NR :: MT. TF; hoc est $\mu\nu$. FG :: FZ. $\mu\xi$. Fig. 158.
quare $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ. 159.

XV. Etiam *summa quadratorum* ex applicatis $\mu\xi$ æquatur *summæ Rectangulorum* ex TF, FZ; & *summa Cuborum* ex $\mu\xi$ æquantur ipsis TFq × FZ (ad rectam scilicet AD computationem exigendo) Fig. 158, parique quoad cæteras potestates modò. 159.

XVI. Rursus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis; sitque recta $\beta\delta$ æqualis ipsi BD, & compleatur *Rectangulum* $\alpha\beta\delta\zeta$, tum curva KZL talis sit, ut FZ ipsi QP æquetur; erit *rectang.* $\alpha\beta\delta\zeta$ Fig. 160, æquale *spatio* ADLK. 161.

Nam est MN. NR :: (PM. MF ::) PQ. IF. quare MN × IF = NR × PQ; hoc est $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ. unde patet.

Hinc noto ſpatio AKLD cognoſcetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $\beta\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $\alpha\beta\gamma\psi$, ſit curva OXX talis, ut FX ipſi TY æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) ADOXX æquale *Rectangulo* $\alpha\beta\gamma\psi$.

Nam MN . NR :: YT . DA; hoc eſt $\mu\nu$. FG :: FX . $\mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva AMB innoteſcet,

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $\beta\delta = R$; ſi curva OXX talis ſit, ut MF . MP :: R . FX; erit *rectangulum* $\alpha\beta\delta\zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam MN . NR :: MP . MF :: FX . R. adeóque $MR \times R = NR \times FX$; ceu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ AMB convexa rectam AD ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (θεωρηματικῶς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD; & lineâ quâcunque KL *comprehenſam* accipe sîs. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ ſecet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adſumptâque rectâ de-

Fig. 163. terminatâ Z; ſit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z. quinetiam ſit curva AIB talis, ut ad ipſam productâ rectâ GFI, ſit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *ſpatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *ſpatio* ADLK.

Æquè procedit methodus, etiamſi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & AK = Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva $AB = \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* $AK = Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^3}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïs*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

HIc demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantésq;* spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *circuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B
Fig. 167. *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta $\alpha\zeta$ æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu\varpi\psi$ rectæ $\alpha\zeta$ perpendiculares; quarum $\alpha\gamma =$ A C; $\mu\xi =$ A S; $\mu\psi =$ C S; $\mu\varpi$ $=$ M P.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim C F . C A :: (C M . C S ::) C A . C S. adeòque C F $\times$ CS $=$ CAq. item CF$\times$FZ $=$ CA $\times$ AK $=$ C A q. ergo C S $=$ F Z.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujusce Lectionis 9.

III.

III Curva A X X talis sit, ut P X secanti C S (vel C T) æquetur; *spatium* A C P X hoc est *Summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo sectori* A C M.

Nam (a) *spatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* est; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergò *totum spatium* A C P X totius *sectoris* A C M duplum est. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè constat.

IV. Curva C V V talis sit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *spatium* C V P (hoc est *summa tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *semissi quadrati ex subtensa* A M. Fig. 166.

Manifestè consectatur ex septima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbolæ* L E occurrat in O) erit *spatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (seu *cylindricum* ad basin P L O Q, altitudine B C (duplum *summæ quadratorum* ex rectis C S, seu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc est ::) B C + C P. B C — C P; erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C — C P. item est Q O. B C :: B C. B C + C P; ergò (pares rationes adjungendo) est P L + Q O. Q O + Q D. B C = 2 B C. B C — C P + B C. B C + C P; hoc est P L + Q O. B C :: 2 B C q. B C q — C P Q (hoc est ::) 2 B C q. P M q. verùm est P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2PXq. BCq :: 2BCq. PMq. ergò PL + QO. BC :: 2 PXq. BCq. vel PL×BC + QO×BC. BCq :: 2PXq. BCq. quare PL × BC + QO × BC = 2PXq. itaque B C in omnes PL + Q O ducta adæquat omnia totidem PXq. unde constat Propositum.

VI. Hinc spatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (hoc est *summa secantium in arcu* A M ad $\alpha\beta$ applicatarum) æquatur *subduplo spatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam sumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta $\mu\nu$, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Estque M N. M R :: (MC. CF :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X × C A. adeóque M N × P X × C A = M R × P X q. seu $\mu\nu \times \mu\psi$ × C A = M R × P X q. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q summa spatii P L O Q in C A ducti subdupla est. Ergò omnia totidem $\mu\nu \times \mu\psi$ in C A ducta eidem subduplo æquantur. quare spatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (omnibus

nibus

nibus $\mu\nu\times\mu\psi$ par) æquatur ſubduplo ſpatii P L O Q.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\psi$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant C A × C P × P X (hoc eſt *parallelipipedum Baſe Rectangulo* A C P D, *Altitudine* C S).

Hujus *Effati demonſtrationem* (quanquam πρόχειρον) tranſilio; quoniam aliud *Schema* diſcursúmque præ reliquis pleríſque longiuſculum expoſcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva A Y Y talis ſit, ut F Y æquetur ipſi A S; ductâ tum rectâ Y I ad A C parallela, erit etiam *ſpatium* A C I Y Y A (hoc eſt *ſumma Tangentium* ad *arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum, unà cum *rectangulo* F C I Y) æquale *ſubduplo ſpatio hyperbolico* P L O Q.

(a) 1. Lect. XII. (b) 14. Lect. XII. Nam *ſpatium* $\alpha\gamma\varpi\mu$ (a) æquatur *rectangulo* A C P D; hoc eſt *rectangulo* F C I Y (nam eſt C A . A S :: C F . F M; vel C A . F Y :: C F . C P. adeoq; C A × C P = F Y × C F). item ſpatium $\gamma\varpi\psi$ (hoc eſt omnes rectæ T F ad $\alpha\epsilon$ applicatæ, quotquot ad arcum A M pertinent) (b) æquatur *ſpatio* A F Y; ergo *ſpatium* A C I Y A æquatur *ſpatio* $\alpha\gamma\psi\mu$; hoc eſt (ut mox oſtenſum) *ſemiſſi ſpatii hyperbolici* P L O Q.

Aliter illud, (eíque connexa) dimenſus ſum, *hoc præmiſſo Lemmate*.

IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) E R K ad

Fig. 168. cujus axes C E D, C I; & ad hos ordinatæ K I, K D; ſit item curvâ E V Y talis, ut in *hyperbola* liberè ſumpto puncto R, ductâque recta R V S ad D C parallelâ, ſint S R, C E, S V continuè proportionales; connexâ rectâ C K, erit *Spatium* C E Y I *Sectoris hyperbolici* K C E duplum.

Nam ducatur R T *hyperbolam* tangens, & R H ad C I parallela. Eſtque C H . C E :: C E . C T. quare C T = S V; vel H T = R V. itaque *Spatium* E D K Y duplum eſt *ſegmenti* E D K. item *rectangu-*

10. Lect. XI. *lum* I K D C *trianguli* C D K duplum eſt; ergo *reliquum ſpatium* C E Y I *reliqui ſectoris* E C K duplum eſt.

X. Reſumptâ jam quadrante circulari A C B, ſit C E = C A;

Fig. 169. & axe A E, *parametro* etiam A E, deſcripta ſit *Hyperbola* E K K; poſitóque curvam A Y Y talem eſſe, ut ordinatâ quâcunque rectâ M F Y, ſit F Y tangenti A S æqualis; ducatur recta Y I K (rectam C Z,

C 2 secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K ; erit spatium A C I Y A *sectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam est C I q . C A q :: A S q . C A q :: F M q . C F q :: C A q — C F q . C F q . componendóque , C I q + C A q . C A q :: C A q . C F q . hoc est (ex *hyperbolæ* natura) I K q . C A q :: C A q . C F q . vel I K . C E :: C E . I Y . itaque *spatium* A C I Y A *sectoris* E C K duplum esse perspicuum est è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc si *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A descripta sit *Conchois* A V V, cui occurrat Y F M producta in V ; erit M V = F Y ; adeóque *spatium* A M V *spatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *spatiorum* ejusmodi *Conchoidalium dimensiones* innotescunt.

XIII. Nescio, an *operæ* sit hoc adjicere *Corollarium.*

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis ; & C E = C A ; sintque duæ (sibimet inversæ) *Conchoides* A Z Z , E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S descriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta E Y Z (lineas intersecans, ut vides) sit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K, cujus *centrum* C, *semiaxis* C E ; duc&âque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *spatium quadrilineum* AEOYZPA (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehensum) æquale *quadruplo sectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam si *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X ; è dictis facilè colligetur *spatium* A P Z I C æquari *duplo sectori Hyperbolico* E C K unà cum *sectore circulari* CEX. item *spatium* E O Y I C æquari *duplo sectori* E C K, *dempto sectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F, Y G ad C S parallelæ ; & protrahantur G Y L, L I H . ac ob I Y = I Z, est F Z + G Y = 2 C I . & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I . ergò patet.

Adnotari potest, si lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, si ponatur N = 2 triang. C E I — 2 sect. E C K ; fore spat. E Z T + E O Y E = 2 N.

Nempe N + C X I = spat. A Z T . & N — C X I = spat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam *Cissoidalis spatii* dimensionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H ; eique congruens *Cissois* A Z Z cujus scilicet hæc proprietas est, Fig. 171.

Fig. 171. ut in *circumf.* A M B sumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z secet in Z, sit M Z = A S) in recta verò $\alpha\beta$ sumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* AM *sinubus versis* A F ; erit *spatium trilineum* M A Z *spatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum*.

Nam sumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Estque jam A S . A B (2 C M) : : (F M . F B : :) A F . F M . & 2 C M. 2 M N : : C M . M N : :) F M . N R. quapropter erit ex æquo A S. 2 M N : : A F . N R ; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc est N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *spatium* M A Z *duplo spatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

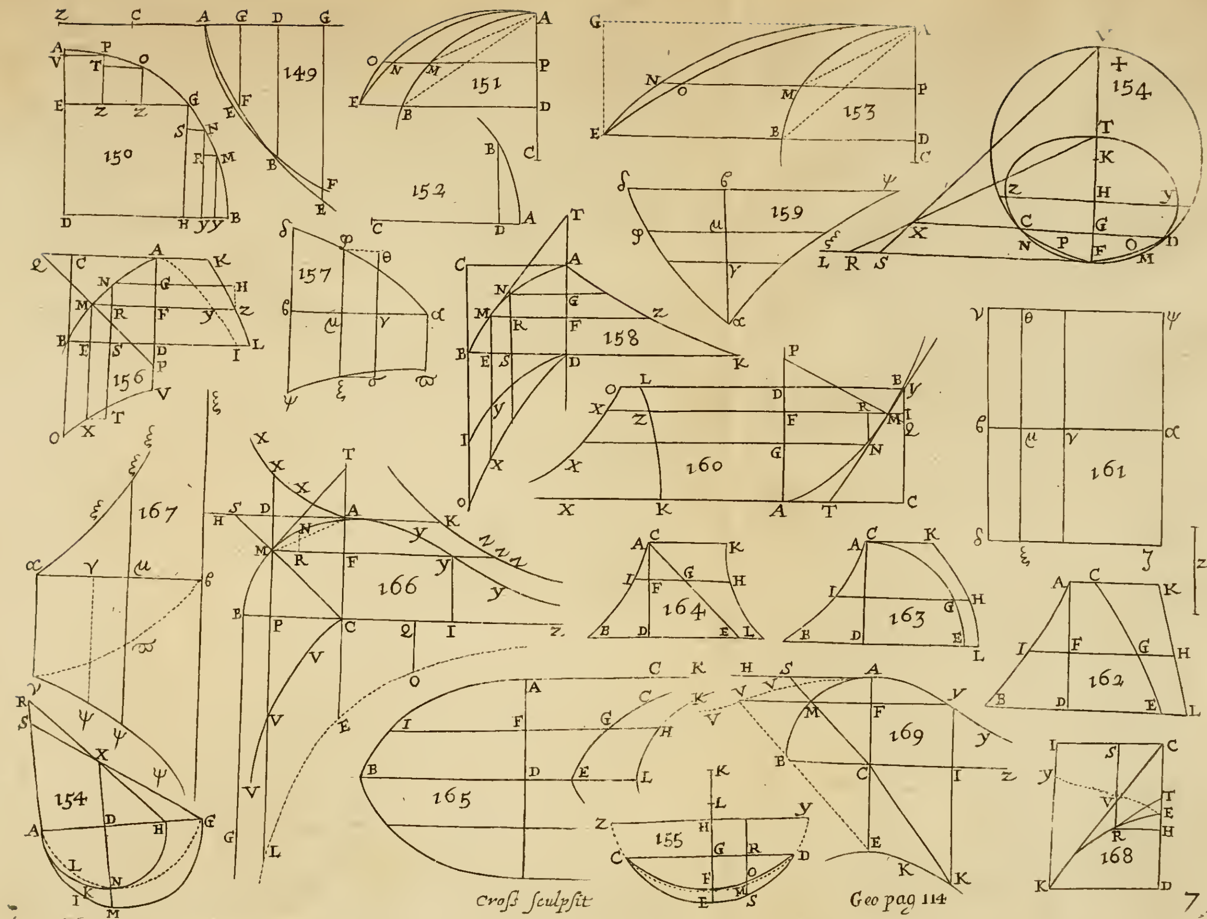
Fig. 172. Hinc cum *spatii* $\alpha\mu\xi$ dimensio vulgò nota sit, & è suprà positis etiam facilè deducatur ; habetur *spatii cissoidalis* M A Z *dimensio*. calculum ineat qui volet.

Ista claudet hoc *Consectariolum* :

Fig. 173. (*a*) 7, & 12. XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G; sintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eædem quæ (*a*) superiùs. arcus verò sumptus A M in partes divisus concipiatur indefinitè multas punctis N ; per quæ trajiciantur radii C N ; & his occurrant rectæ N X ad puncta X ; *summa rectarum* N X (in radiis) æquatur spatio $\frac{AFZK}{Rad.}$; & *summa rectarum* NX (in parallelis ad AS) æquatur *spatio* $\frac{PLQO}{3\ Rad.}$

Nam triangulum X M N triangulo S A C simile est ; & inde X M. M N : : A S. C A. & X N. M N : : C S. C A. unde $XM = \frac{MN \times AS}{CA}$; & $XN = \frac{MN \times CS}{CA}$. & ità in reliquis ; unde liquet Propositum, ex 2, & 7 harum.

APPEN-


Croſs ſculpſit
Geo pag 114
7

APPENDICULA 2.

BRevitati ſimul ac perſpicuitati (huic autem præcipuè) conſulentes præcedentia recto diſcurſu comprobata dedimus; quali non modò veritas, opinor, ſatis firmatur, at ejuſdem origo limpidiùs apparet. Verùm nè quis, minùs hujuſmodi ratiociniis adſuetus, hæreat, iſta paucula ſubdemus, quibus tales diſcurſus communiantur, quorumque ſubſidio non difficilè conficiantur *Propoſitorum demonſtrationes apagogicæ.*

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, ſingulæ deſignatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (ſimul acceptarum) ad *omnes conſequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam ſint rationes A ad M, B ad N, C ad O ſingulæ æquales rationi R ad S. ergò $X \sqsupset M$; & $Y \sqsupset N$; ac $Z \sqsupset O$. patet igitur fore $A+B+C . X+Y+Z \sqsubset A+B+C . M+N+O$. hoc eſt $A+B+C . X+Y+Z \sqsubset R . S$.

II. Hinc patet, ſi quotlibet rationes ſingulæ deſignabili quâcunque majores ſint, *antecedentium ſummam ad ſummam conſequentium* etiam deſignabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D; curvam verò tangat recta B T; ſitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam ſecans ad N; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis deſignabili, puta quàm R ad S.

Nam ſit D E . E T :: R S; connexaque recta B E curvam ſecet in G, rectam P O in K; per G vero ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, eſt B P $\sqsupset$ B F; adeóq; P K $\sqsupset$ P N (nam ſubtenſa B G intra curvam tota cadit). ergò P N . N O $\sqsubset$ P K . K O :: D E . E T :: R . S.

IV. Hinc, ſi baſis D B in partes ſecetur indefinitè multas ad puncta Z; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam ſecantes punctis E, F, G; per hæc verò ducantur *Tangentes* B Q, E R, F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q, R, S, T; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q, F R, G S, A T (ſimul ſumptas) rationem quâvis aſſignabili majorem.

Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent
Fig. 175. igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (ſingulæ ad ſingulas ſibi in directum poſitas reſpectivè) rationem deſignabili quâcunque majorem. ergò ſimul omnes iſtæ ad has ſimul omnes *rationem* habent deſignabili quâvis *majorem*; hoc eſt recta AD ad EQ + F R + G S + A T ejuſmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T ſimul acceptæ nihilo æquivalent; ſeu rectæ Z E, Z Q; & Z F, Y R, &c. æquantur; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. reſpectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quaſi coincidentes haberi poſſunt. quin & adſumere tutò licet, quæ evidentèr his cohærent.

Fig. 176. VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc applicata D B; æquiſecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B interſecantes punctis X; quibus occurrant per ipſa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H; ſit autem ſegmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenſo) *circumſcripta figura* ADBMXNXOXPXRA major *ſpatio* quodam S; dico *ſegmentum* A D B non eſſe minus quàm S.

Nam ſi fieri poteſt ſit A D B minus quàm S exceſſu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R eſt indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus eſſe *rectangulo* A D L K.

A D L K. item patet *segmentum* A D B unà cum *rectangulo* A D Z R majus esse *figurâ circumscriptâ* (etenim *rectangulum* A D Z R *rectangulis* R H, P G, O F, N E, M Z æquatur, proindéque majus est *trilineis* A X R, X X P, X X O, X X N, X B M). ergò *segmentum* A D B unà cum *rectangulo* A D L K multo majus est *figurâ circumscriptâ*; hoc est, *spatium* S majus est *figurâ circumscriptâ*, contra *Hypothesin*. Fig. 176.

VII. Item, si ponatur *figura inscripta* HXGXFXEXZDH minor *spatio quodam* S; dico *segmentum* A D B non esse majus quàm S.

Nam si majus esse velis, esto rursum *excessus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (sicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Est autem *segmentum* A D B, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inscriptâ. ergò segmentum A D B, dempto rectangulo ADLK, multo minus fit inscriptâ figurâ; hoc est *spatium* S minus est inscriptâ figurâ, contra *Hypothesin*.

VIII. Hinc, si *spatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui circumscripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA; nec non cui *inscripta figura æquetur figuræ* H G F E Z D H; palàm est *spatium* istud S *segmento* A D B exæquari.

Nam (utì mox ostensum) hoc illo majus esse nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumscriptionis* ac *inscriptionis modos* accomodari. suffecerit innuisse.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

SIt *curva* quæpiam A M B, cujus *Axis* A D, & in hoc signatum punctum C; ad ipsum verò ordinata recta B D. à puncto quopiam M in curva sumpto ducatur recta M E curvam tangens, & à C demittatur C G ad M E perpendicularis; sit item determinata recta C V ad planam D A B recta, & connectatur V G (erit V G ipsi M G perpendicularis, nam si ducatur C H ad G M parallela, liquet C H plano G V G rectam esse, adeoque G M eidem recta erit) Porrò sit linea R S talis, ut ductâ rectâ M I X ad A D parallelâ (quæ secet ordinatam Fig. 177.

dinatam BD in I, & lineam RS in X) sit MP . ME :: VG . IX; vel, sit linea AL talis, ut ductâ MPY ad BD parallelâ (quæ secet axem AD in P, & lineam AL in Y) sit PE . ME :: VG . PY; erit
Fig. 177. tunc utrumque *spatium* (singillatim) BRSD, vel ADL duplum *superficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam AMB mota progeneratur.

Nam sumatur MN indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ NOKT ad ipsam AD, & NQZ ad BD parallelæ (quæ lineas expositas, ut *Schema* monstrat, secent) connectantúrque rectæ VM, VN. estque MO . MN :: MP . ME :: VG . IX. quare $MN \times VG = MO \times IX = IK \times IX$. Item est NO . MN :: PE . ME :: VG . PY. unde $MN \times VG = NO \times PY = QP \times PY$. Est autem $MN \times VG$ duplum trianguli MVN. quapropter tam $IK \times IX$, quàm $QP \times PY$ duplum est *trianguli* MVN. pariter autem ubique fit. ergò constat Propositum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva AMB *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, sitque $CV = CA = r$. & $CP = x$ (nam hujusmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ MC; patet esse $EC = \frac{rr}{x}$; & $MCq = 2xx - rr$ (nam $PMq = xx - rr$) item est MCq. CPq :: MEq . MPq; hoc est MCq . CPq :: ECq . CGq. hoc est $2xx - rr . xx :: \frac{r^4}{xx} . CGq = \frac{r^4}{2xx - rr}$. quare $VGq = \frac{r^4}{2xx - rr} + rr = \frac{2rrxx}{2xx - rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$. vel $VG = \frac{VA \times CP}{MC}$. quare VG . VA :: (CP . MC) :: MP . ME. hinc consectatur in hoc casu, quum ubique sit $IX = VA$, *lineam* RS fore *rectam*; & *rectangulum* BRSD *superficiei conicæ* AMBV *duplum esse*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* suppeditavit Generosus, ingenio ac eruditione præstans, Vir (*Collegii nostri, quod olim Sociorum Commensalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciscus Jessepius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioso mihi comiter impertito scripto (ipsiùs injussu quidem, at spero non ingratiis) seu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A *m coni recti* A B C *p* recta infinita E C transeat per *coni superficiem*, & quiescente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut semper aliqua pars ejus secet *coni superficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in superficie coni sitas) *solidum comprehensum à superficie vel superficiebus genitis à linea* E C sic mota & à *portione superficiei* ejusdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata describit in *superficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* est æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *basis* verò æqualis eidem *superficiei conicæ terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C constat ex *infinitis pyramidibus* E C *o* A E *o o* A, &c. æquialtis perpendiculari E *n*, quarum bases omnes simul sumptæ, exhauriunt *superficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus sit *Conus rectus* A B C *p* secetur à plano C F D axi A *m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & super *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; sitque E δ plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita se habet ad A C D *basem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano basi C F D (quæ est utrique Conico communis) parallelo ergo sunt æquales. Si ergò à solido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit solidum E C F D A C quale in propositione prima describitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ sunt *bases altitudinibus*, ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus sit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum secabit *axem coni* in puncto *q* supra *verticem* productum & in communi intersectione cum *superficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita se habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quiescente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A*r* generat tres *superficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *superficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *solidum æquale* est *pyramidi* cujus *altitudo* est æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt solidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc solidum *q r s t* A *r* potest considerari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *base figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *bases altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *superficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Datus sit *Conus rectus* A B *h g* secetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* secat *axem coni*, demittatur HK *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à verticè A *perpendiculum* A L plano H F E G. Fig. 179.

Dico, *Superficies conica* terminata à lineis F E G G A A F ita se habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K.

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo superior.

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapsa; quæ forsan ex usu sit adjicere. *Demonstrationes* elicere poterit quispiam è præmissis; & potior inde fructus emerget.

Problema I. Fig. 180.

Sit *curva* quævis K E G, cujus *axis* A D; & in hoc signatum punctum A; curva reperiatur, puta L M B, talis, ut si ductâ utcunque rectâ P E M axi A D perpendicularis curvam K E G secet in E, & curvam L M B in M; nec non connectatur A E, & curvam L M B tangat recta T M; sit T M ipsi A E parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe A D sumptum, protendatur recta R Z ad ipsam A D perpendicularis; cui occurrat recta E A producta in S; & in recta E P sumatur P Y = R S; ità determinetur curvæ O Y Y proprietas; tum sit rectangulum ex A R, & P M æquale spatio A Y Y P (seu $PM = \frac{\text{spat. } AYYP}{AR}$) habebit curva L M M B conditionem propositam.

Adnotari potest, si stantibus reliquis, sit curva Q X X talis, ut cum hanc secet recta E P in X, sit P X = A S; erit spatium AXXP æquale rectangulo ex A R, & curva L M, seu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit A D G *circuli* quadrans, & ductâ E P ad A D utcunque perpendiculari, connexâque D E; designetur curva A M B talis, ut si Fig. 181. producta recta E P M hanc secet in M, ipsamque tangat recta M T, sit M T ad D E parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur A Z ad D G parallela; & huic occurrat producta D E in S, & curva A Y Y talis sit, ut si hanc secet producta P E in Y, sit P Y = A S; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. } AYP}{AD}$; factum erit.

Not. Quòd si curva Q X X talis sit, ut P X = D S (vel si A Q = A D, & Q X X sit *hyperbola* angulo A D G comprehensa) erit curva A M × A D = spat. A Q X P.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut si à quocunque puncto in ipsa sumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, sit A E inter designatam A R, & A P proportione media, secundum ordinem, cujus exponens sit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n \,.\, m :: $ A E . arc. A M.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E sit inter A R, A P simpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Ciclois primaria*; hujus igitur dimensio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehensivo peraguntur.

Probl. II.

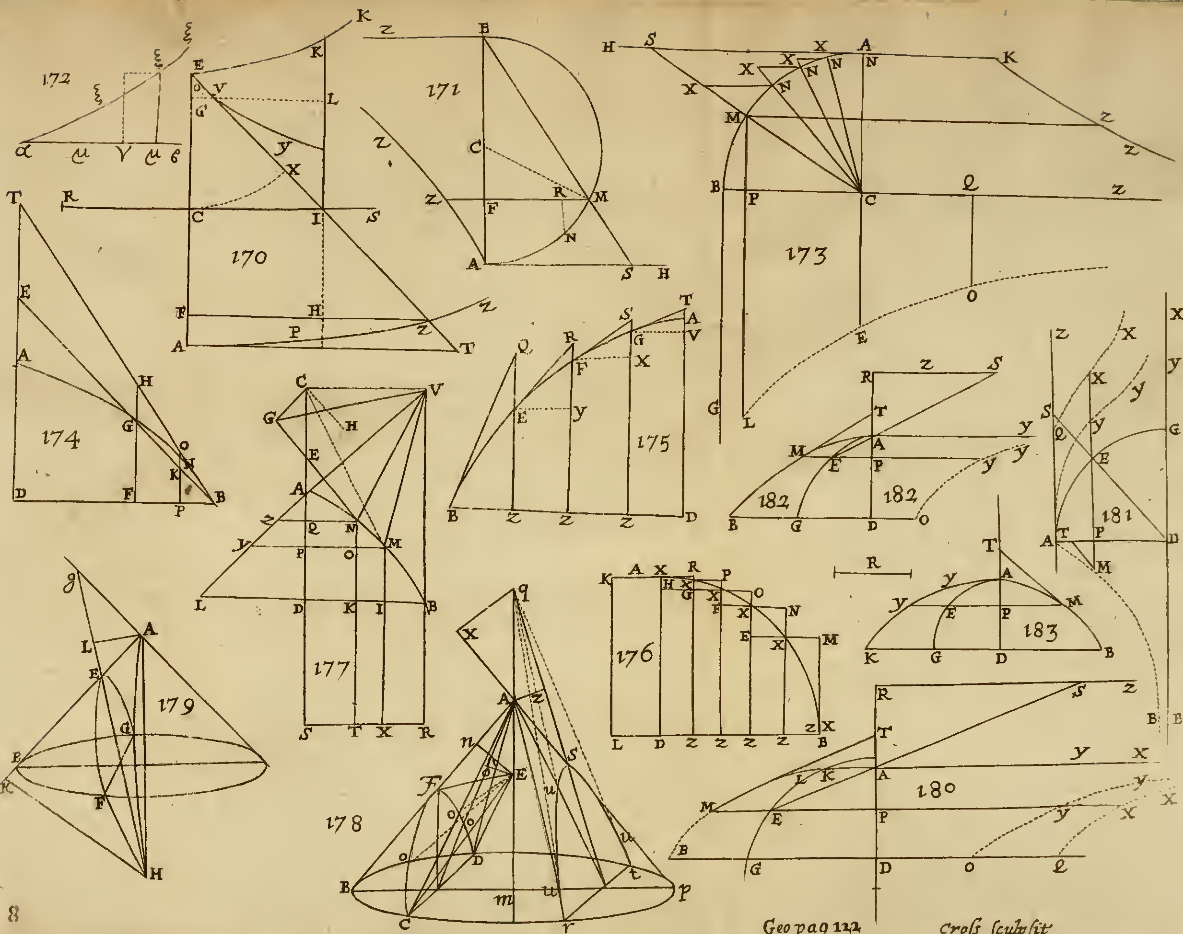
Fig. 183. Curva designetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac sumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & posito rectam M T ipsam tangere, habeant T P, P M relationem assignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem assignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe sumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) sic ut per ejusmodi puncta Y transeat curva Y Y K; tum si fiat P M $= \frac{\text{spat. } APY}{R}$; de curvæ A M B indè constabit natura.

Exemp. I.

Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur designatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum sit, juxta præscriptum, R. arc. A E :: R . P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur P M $= \frac{APY}{R}$.

Exemp.


172
170
171
173
174
175
177
176
182
182
181
183
179
178
180
8
Geo pag 122
Cross sculpsit

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs GE; & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M . R : : R . P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L . R : : R . L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium LEXH æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & *o* (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* LEXH; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. ADLK = R × D L − DO. 2. Summam Z P q = R × : $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\,cub. - DO\,cub.}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ A D L K, ducantúrque φ ψ ad A D, & φ ξ ad D L perpendiculares, fore $\varphi\psi = \frac{DL + DO}{4}$, & $\varphi\xi = R - \frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *asymptotis* D B, D H per F descripta sit *hyperbola* F X G; item centro D descriptus sit circulus K Z L; sit denuò curva A M B talis, ut in hac sumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item sumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, sit *spatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari sectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; sitque D B × B F = R q; fiátque D K . R : : R . P; tum D K . P : : D M . D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc esse proprietatatem; ut D I sit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (seu nihilum) & arcum K L est medius *Arithmeticè*. hoc est, si D I sit numerus in serie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L sint Logarithmi ipsarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipsius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, si D I sit numerus in serie *Geometrica* exorsa à D O, & desinente in D B ac *o* sit *Logarithmus* ipsius D O, & arcus L K ipsius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipsius D I.

Quod si absolutè construatur curva A M B, ejúsque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hpperbolici spatii Cyclismum* dari, vel *Circuli hyperbolismum*.

Hujusce *Spiralis* naturam, ac dimensionem (ut & Spatii B D A dimensionem) luculentè prosecutus est præclarissimus D. *Wallissius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Sit spatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G
Fig. 188. comprehensa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, ut si utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis sit, & M T curvam A M B contingat; sit D T . D M : : R . D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = $\sqrt{}$ R × D N; sumptâque liberè rectâ

rectâ DB, sit DB . R : : R . BF (sit autem BF, ut & DH ipsi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH inclusa, transeat *hyperbola* FXX; sitque spatium BFXI (positâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo spatio ZDL; sit denuò DM = DG; erit M in curva quæsita; quam utique si tangat recta TM, erit TD . DM : : R . DN.

Probl. VI.

Sit rursus spatium EDG (ut in præcedente) reperienda est curva AMB, ad quam si projiciatur recta DNM, & sit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN. Fig. 188.

Adsumatur quæpiam R, & sit DZq $= \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ DB (cui perpendiculares DH, BF $= \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *asymptotos* DB, DH describatur *hyperboliformis* secundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, sint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur spatium BIXF æquale duplo ZDL; & sit DM = DI; erit M in curva quæsita; quam si tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) & utcunque ductâ PM ad DB parallelâ datum sit (seu expressum quomodocunque) spatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, sit R × PZ = APM; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ . PO : : R . PM.

Exemp. AP vocetur x & sit APM $= \sqrt{rx^3}$, ergo PZ $= \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur PO $= \frac{3xx}{2r}$. Estque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} . \frac{3xx}{2r}$: : $r . \frac{3}{2}\sqrt{rx}$ = PM. unde AMB est *Parabola*, cujus *Parameter* est $\frac{9}{4}r$. *Aliter*.

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2\,APM}$. & sit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$ unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rursus AMB erit *Parabola*.

Probl. VIII.

Fig. 190. *Sit* figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehensa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum sit spatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, sit $DZ = \frac{2\,ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4\,ADM}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam σκέψιν instituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Aberd.* Alienæ messi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque isthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi se ingesserunt) unam aut alteram observatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data sit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL describatur *Circulus* LXX; sit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, sit rectangulum ex P M, P Z æquale quadrato ex C L (vel $PZ = \frac{CLq}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{spat. } DKZP}{CL}$ (vel sector L C X subduplus spatii D K Z P) & in C X capiatur $C\mu = PM$; erit linea $\varsigma\mu\mu$ ipsius B M A involuta; vel spatium $C\mu\varsigma$ spatii A D B.)

Exemp. Sit A D B circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonstratis constat) spat. D K Z P (2 sector L C X). sect. B D M :: C L q. D B q. unde arc. L X. arc. B M :: C L. D B. quare ang. L C X = ang. B D M = ang. D M P. unde ang. $C\mu\varsigma$ est rectus, adeóque linea $\varsigma\mu C$ est *semicirculus*.

Coroll. 1. Subnotari potest, si duæ figuræ A D B, A D G analogæ fuerint; & harum *involuta* sint $C\mu\varsigma$, $C\nu\gamma$; & fuerit $C\mu$. $C\nu$ :: D B. D G; erit reciprocè ang. $\varsigma C\mu$. $\varsigma C\nu$ :: D G. D B. Fig. 193.

2. Illud etiam conversè valet.

3. Sin curvæ $C\nu\gamma$, $CS\varsigma$ suo modo analogæ fuerint, hoc est, si utcunque à C projectâ rectâ $C\nu S$, habeant $C\nu$, C S eandem perpetuò rationem, erunt hæ similium linearum *involuta*. Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $\varsigma C\varphi$ rectis $C\varsigma$, $C\varphi$, & aliâ lineâ $\varsigma\varphi$ comprehensâ, ei competentem *evolutam* designare. Fig. 195.

Centro C utcunque describatur *circularis arcus* L E (cum rectis $C\varsigma$, $C\varphi$ constituens sectorem L C E) tum ductâ C K ad L C perpendiculari, sit curva ς Y H ità rectam C K respiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, sumptâque C O = arc L Z, ductâque O Y ad C K perpendiculari, sit $OY = C\mu$; porrò ad rectam D A sic referatur curva B M F, ut cùm sit $DP = \frac{\text{spat. } C\varsigma YO}{CL}$; & P M ad D A perpendicularis; sit etiam $PM = C\mu$; erit spatium DBFA ipsius $C\varsigma\varphi$ *evolutum*. Fig. 196.

Exemp. Sit L Z E arcus circuli centro C descripti, & $\varsigma\mu C$ ejusmodi *spiralis* Fig. 197.

spiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ C μ Z habeat arcus E Z ad rectam C μ rationem assignatam (puta R ad S) Manifestum est lineam ϵ Y H esse rectam, quoniam E Z (K O). C μ (O Y) :: R . S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F fit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D se habent ut spatia K O Y, K C ϵ, hoc est ut quadrata ex ipsis OY, Cϵ, vel ex ipsis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram ϵ C φ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iste *cylindricus* æqualis *solido*, quod procreatur è figurâ C ϵ H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) & curva AZ L talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, sit P Z = $\sqrt{2}$ A P M; sit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adsumptâque rectâ R, sit Z P q . R q :: P M . P Y; sitque denuò D L . R :: R . L E. & per E intra angulum L D G describatur *Hyperbola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit spatium P D O Y æquale *spatio Hyperbolico* L H X E.
Fig. 199.

Hinc *summa* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2\,LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, basis D B; & curva K Z L talis, ut adsumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, sit $\sqrt{}$ A P M . P M :: R . P Z; erit spatium ADLK
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in 2 $\sqrt{}$ A D B; vel $\frac{ADLK}{2R} = \sqrt{}$ A D B.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit summa omnium $\frac{PM}{APM}$ = $\sqrt{2}$ D A × arc. A B.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) sintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B sumpto quopi-

am puncto M, ductísque rectis M P X ad B D, & M Q Y ad A D parallelis, positóque rectam M T tangere curvam A M B, sit T P . P M :: Q Y . P X; erunt figuræ A D K E, D B L G sibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc conversum. Nempe si figuræ A D K E, D B L G æquentur, & M T curvam A M B tangat, erit T P . P M :: Q Y . P X:

Not. Omnium hactenus Propositorum fœcundissimum est hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè consectantur. Nam posito lineam A M B indeterminatam esse naturâ, si ipsarum E X K, G Y L alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde resultabit Theorema quoddam ejusmodi, qualia superiùs exhibentur aliquammulta. Si *e g.* linea G Y L ponatur recta cum ipsa B D semi-rectum constituens angulum (quo casu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si G Y L sit recta ad D B parallela, emerget *Lectionis ejusdem.* Rursus si P M = P X (vel lineæ A M B, E X K sint eædem) consequetur hinc *decima* ejusdem. Exhinc porrò liquet adsumpto cuilibet spatio *infinita, genere diversa, spatia æqualia* facilè designari veluti si *spatium* D G L B ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva A M B sit *parabola*, cujus *axis* A D, emerget curvæ E X K hæc proprietas, ut (si dicatur D B = r; A P = x; P X = y; & k (vel $\frac{DBq}{2AD}$) sit *parabolæ semiparameter*) sit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin A M B ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva E X K. Fig. 202.

his autem expensis ἀβλεψίαν meam incuso, qui non hoc *Theorema* (sicut & ea quæ subsequuntur, quorum ferè ratio consimilis est, & suppar usus) primo loco posuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox subjiciendis) quod fieri posse video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujusmodi *Phrygiam sapientiam* juxta mecum plerisque familiarem autumo, literas has tractantibus.

Theor. V.

Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curva A M B comprehensum) sint item curvæ E X K, G Y L ità relatæ, ut si in curva A M B liberè sumatur punctum M, ducatur D M X, sit D Q = DM, ducatur Q Y ad D B perdendicularis, sit D T ad D M perpendicularis, recta M T curvam A M B contingat; si, his inquam suppositis, sit T D . D M :: D M × Q Y . D X q; erit spatium DGLB spatii E D K duplum. Fig. 203.

Theor.

Theor. VI.

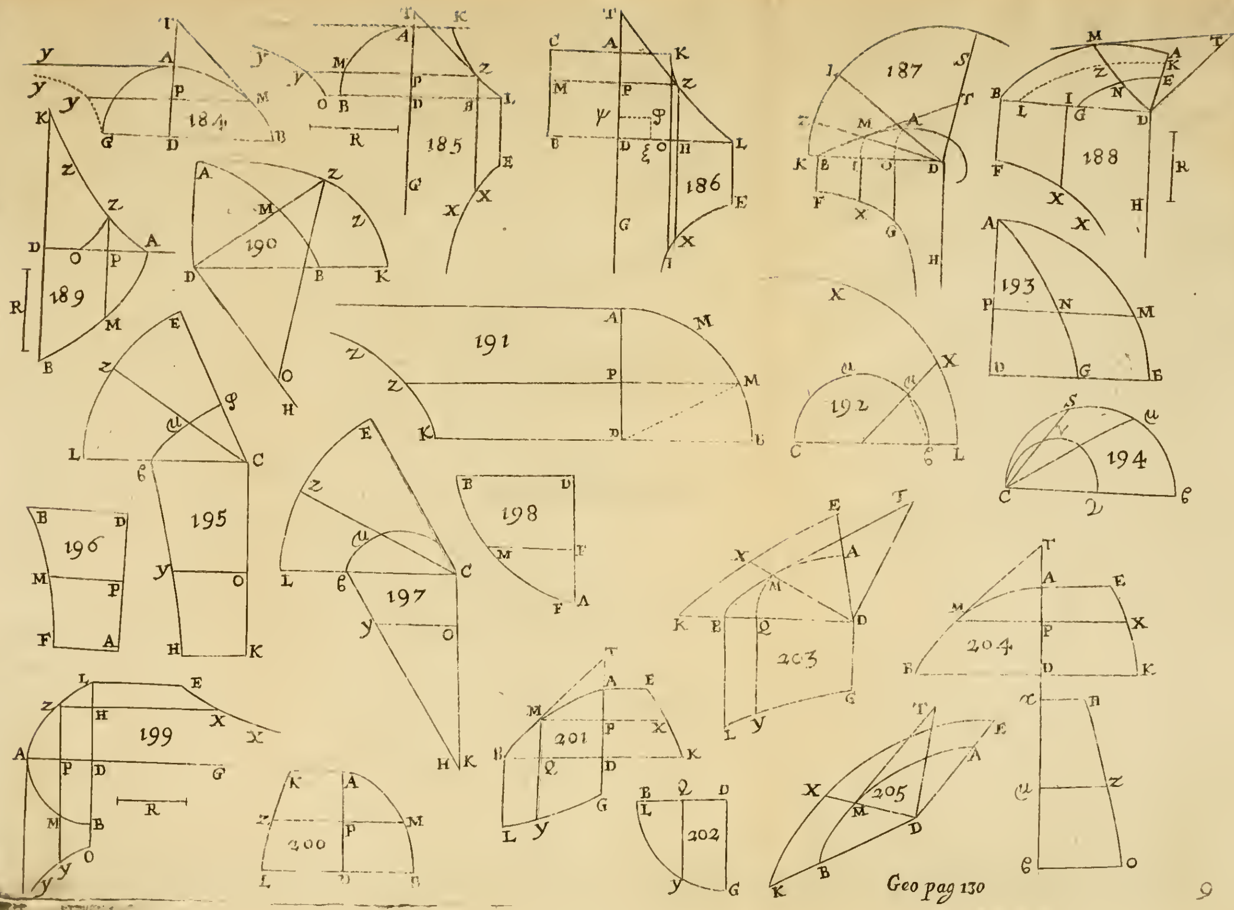
Fig. 204. Sit rursus A M B curva quævis (cujus axis A D, basis D B) & curvæ E X K, H Z O ita versus se, & axes A D, $\alpha\beta$ relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, sumptâ $\alpha\mu =$ arc A M, ductâ μ Z ad $\alpha\beta$ perpendiculari, positóque rectam T M curvam A M B tangere; sit T P . T M : : μ Z . P X; erunt spatia A D K E, $\alpha\beta$ O H æqualia sibi.

Theor. VII.

Fig. 204, 205. Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) sint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut si quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, sumatur $\alpha\mu =$ arc A M; ducatur μ Z ad rectam $\alpha\beta$ perpendicularis; sit D T perpendicularis ipsi D M; recta M T curvam A M B tangat; sit T D . T M : : D M $\times$ μ Z . D Xq; erit spatium $\alpha\beta$ O H spatii E D K duplum.

Sed horum hic esto terminus.

LECT


184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
Geo pag 130

LECT. XIII.

ÆQuationum naturam è terminorum *analogia* exposuit *Vieta*; illam ex eorum in se ductu dilucidiùs explicuit *Cartesius*. Eam ego jam è linearum singulis appropriatarum descriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui sanè modus rem præsertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In sequentibus perpetim ad easdem series redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent easdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti b, & hæc versus H indefinitè protendatur; sint anguli R A H, S B H semirecti, sintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine secet punctis L, M, N; rectasque B S, A R punctis K, Z) sit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Nam si A G (vel G Z) dicatur a; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L q $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N $qq = a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. *pag.* 90.

 Notetur

Notetur autem,

1. Ducta AD ad BH perpendiculari, si in hac capiatur $AE = n$; ducatúrque EF ad AH parallela; hujus cum lineis expositis intersectiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique EK, vel EL, vel EM, vel EN æqualis ipsi a; hoc est ipsis AG, concipiendo à singula intersectione deduci ad AH perpendiculares, quæ puncta G determinet.

Fig. 206.

2. Quò punctum G magìs à termino A removetur (& quidem potest GA desumi quavis designatâ major) eò ordinatæ GK, GL, GM, GN magìs increscunt; adeò ut quantacunque ponatur AE, parallela EF curvis occursura sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam EF curvas istas unico puncto intersecat.

3. *Curva* ALL est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ AMM, ANN sunt *hiperboliformes*.

4. Si AO sit $\frac{1}{2}$ AB; & AP $= \frac{1}{3}$ AB, & AQ $= \frac{1}{4}$ AB, ducantúrque OT, PV, QX ad BS parallelæ, erunt hæ curvarum ALL, AMM, ANN *asymptoti*.

5. Hinc constat in secundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, si AE bene magna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series secunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \&c.$$

Fig. 207.

Sit rursus $AB = b$; & indefinitè protrahatur AB versus I, & sint anguli RAI, SBI semirecti; tum concipiantur curvæ BLL, BMM, BNN tales, ut si utcunque ducatur GZ ad AI perpendicularis (dictas lineas secans, utì cernis, punctis K, L, M, N, Z) sit inter

GZ,

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propositas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam si AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$; & GLq $= aa - ba$; & GM cub. $= a^3 - baa$; & GN$qq = a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, si AE ponatur æqualis ipsi n; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum respectivæ, seu æquales quæsitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B versus I infinitè excrescunt, semper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ sunt *hyperboliformes*.

4. Si AB bisecetur in O, trisecetur in P, quadrisecetur in Q, ducantúrque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *asymptoti*.

5. Hinc sequitur in secundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd si n satis magna sit, istæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; scilicet ipsa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n.$
$ba - aa = nn.$
$baa - a^3 = n^3.$
$ba^3 - a^4 = n^4.$ &c.

Fig. 280.

Sit AB $= b$, & anguli RAB, SBA semirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit inter AG (seu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propositas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam posito fore AG $= a$, erit GK $= b - a$; & GLq $= ba - aa$; & GMq $= baa - a^3$. & GNq $= ba^3 - a^4$.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipſam A B perpendiculari) deſumatur A E $= n$; & ducatur E F ad A B parallela, hujuſce cum lineis expoſitis interſectiones exhibebunt radices a reſpectivè.

2. Cùm ad haſce curvas ordinatæ ſemper terminatæ ſint, & inter ipſas maxima quædam detur, hujus *ſeriei æquationes*, pro modulo aſſignatæ A E (vel n) ſubinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor reſpectivè, hoc eſt cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum ſcilicet A E maximam excedat, adeòque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In ſecundo gradu ſi A O $=$ O B, & ordinetur O T, erit O T maxima; (adeóque radicum una major quàm $\frac{AB}{2}$, altera minor) in tertio, ſi A P $= 2$ P B, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{1}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu ſi A Q $= 3$ Q B, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum ſemper major, quàm $\frac{1}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc conſectatur, ſi fuerit, in ſecundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^2 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* eſt ipſa A B, vel b.

6. Omnium curvarum communis *interſectio* (ſeu *nodus*) eſt punctum T; & ſi fuerit $n = \frac{b}{2}$; ſemper A O (vel $\frac{b}{2}$) eſt una radix.

7. Curva A L B eſt *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a + b = n$	$a - b = n.$	$b - a = n.$
$a + b = \frac{nn}{a}$	$a - b = \frac{nn}{a}$	$b - a = \frac{nn}{a}$
$a + b = \frac{n^3}{aa}$	$a - b = \frac{n^3}{aa}$	$b - a = \frac{n^3}{aa}$
$a + b = \frac{n^4}{a^3}$	$a - b = \frac{n^4}{a^3}$	$b - a = \frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs; pro singulo trium serierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur istæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit A H recta indefinitè protensa, & huic perpendicularis A D; in qua sumatur A B = *n*, & ducatur B K ad A H parallela, tum sint lineæ L X L, M X M, N X N tales, ut sumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, sit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quinta* G N; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Fig. 209, 210.

Nam sumpta A E = *b* (sumatur autem A E ob primam seriem ad partes I, ob secundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H semirectus (iste quidem pro prima & secunda serie inclinans versus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema satis monstrat) tum rectæ E F cum expositis lineis intersectiones respectivæ radices *a* determinabunt; nempe si per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus *a* æquales respectivè.

Not.

Exhinc constat, quòd

1. In hac explicatione *coëfficiens b* indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipsa *n*.

2. In prima & secunda serie semper una positiva radix habetur, & unica.

3. In secunda serie minima radix ipsi A B, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* est *punctum* X, ubi B X (vel *a*) = *n*.

5. In tertia serie subindè duæ habentur radices positivæ (quando scilicet E F curvas bis secat) nonnunquam una tantùm (cùm E F ipsarum aliquam contingat; id quod accidit in secundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{2}{3} b$; in quarto cùm $a = \frac{3}{4} b$) aliquando nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nusquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva est *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *asymptoti* sunt rectæ A H, A D.

Series

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + cc = nn.$$
$$a^3 + cca = n^3.$$
$$a^4 + ccaa = n^4.$$

Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcunque ducatur GZK
Fig. 211. ad AD parallela; & facto AG. AC :: AC. ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur a, erit $GK = a + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + cc$; & $GM\,cub = a^3 + cca$; & $GNqq = a^4 + ccaa$.

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, positâ $AE = n$, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde si AE (vel n) $\sqsupset$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *semiaxis* AC; quæ & ordinatarum est *minima*; alioquin si $n \sqsubset c$, semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit $Y\alpha = \frac{1}{2} YX$; $Y\beta = \frac{1}{3} YX$; $Y\gamma = \frac{1}{4} YX$, & per puncta α, β, γ, traductæ concipiantur *hpperbola* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$;

in

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor eſt, quò A E (vel n) major exiſtit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Poſſit hæc ſeries explicari juxta præcedentium modum ſecundum, & eaſdem adhibendo curvas L X L, M X M, N X N; quarum nimirum proprietas eſt, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari, ſit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,cub.}$ Fig. 212.

Nam ſi fiat angulus H A R ſemirectus, & utcunque ducatur G E O ad A H perpendicularis; & ſit G E . c : : c . E O; & per O intra aſymptotos A D, A R deſcribatur *hyperbola* O O; hujuſce cum expoſitis lineis L X L, M X M, N X N interſectiones, radices a reſpectivas determinabunt; ductis utique L G, M G, N G ad A H perpendicularibus; erunt interceptæ A G ipſis a æquales reſpectivè.

Poſſint conſimili modo ſubſequentes omnes æquationes explicari; ſed eas modo duntaxat priore dabimus expoſitas.

Series quinta.

Fig. 213.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$

Series sexta.

$$\left.\begin{aligned} a - \frac{cc}{a} &= n. \\ aa - cc &= nn. \\ a^3 - cca &= n^3. \\ a^4 - csaa &= n^4. \end{aligned}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus R A I semirectus, & A D ad A I perpendicularis; in qua $AC = c$; tum utcunque ductâ G Z ad A D parallelâ, sit A G (vel GZ). A C : : A C . Z K, & per K, intra angulum DAR describatur *hyperbola* K Y K; tum sint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ proposito deservient.

Constat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices respectivè determinantur. Verùm adnotetur prætereà.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad quintam seriem pertinent; reliquæ H L λ, H M μ, H N ν ad sextam.

2. Quoad curvas ad quintam seriem pertinentes; si $A\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$; & ordinetur φ Y; erit Y communis linearum intersectio, seu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata A K est infinita, in secundo A C est maxima; in tertio si fuerit $AP = \sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una semper major est quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto si $AQ = \sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

4. Con-

4. Consequentèr in harum secundo gradu si $n \sqsubset c$; in tertio, si $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in istis casibus recta E F curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est $AH = AC$.

6. Curva C Y H est *Circuli quadrans*, reliquæ A M H, A N H quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva H L L est *hyperbola æquilatera*, cujus axis A H; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

In recta B A H indefinitè protensâ capiatur $AB = b$; & in A D ad B H perpendiculari sit $AC = c$; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ G Y ad A H perpendiculari quæ ipsam B S secet in Y; fiat A G . A C :: A C . Y K; & per K intra angulum D V S describatur *hyperbola* K K K; sint demum curvæ C L L, AMM, A N N tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ satisfacient negotio. Nam est $GK = a + b + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + ba + cc$; & $GM\,cub = a^3 + baa + cca$; & $GNqq = a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva C L L est pars *hyperbolæ æquilateræ*, cujus *centrum* O, ipsam A B bisecans; & siquidem $AC \sqsubset AO$, est O H (ad A B perpendicularis, &) $= \sqrt{ACq - AOq}$ ejus *semiaxis*; sin $AC \sqsupset AO$, ejus axis est $OI = \sqrt{AOq - ACq}$. reliquæ verò curvæ A M M, A N N sunt *hyperboliformes*.

 2. Hinc

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit $n \sqsupset C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas semel intersecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 215. In recta A I sumatur A B $= b$; & in A D ad ipsam A I perpendiculari sit A C $= c$; fiant autem anguli I A R, A B S semirecti, ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipsam B S secans ad ξ; & sit A G . A C : : A C . ξ K; tum per K intra angulum D S B describatur *hyperbola* KYHK; sint denuò curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G, G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ curvæ proposito satisfacient; constat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò H L λ, H M μ, H N ν, ad nonam.

2. Quoad octavam seriem, si bisecetur A B in O, & ordinetur O T ad curvam C L H est O T maxima; sin fiat A P $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9}} +$

cc

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si A Q $= \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam ANH erit Q X maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si (posito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) sit $n^3 \sqsubset ccf + bff - f^3$; in quarto, si (posito fore $g = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$) sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppositis, recta E F curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φ Y; erit Y *Nodus* curvarum; unde si $n \doteq A\varphi$; erit $A\varphi$ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est $AH = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* O H; reliquæ H M μ, H N ν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$

$aa + ba - cc = nn.$

$a^3 + baa - cca = n^3.$

$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216. In recta BAH sumatur $BA = b$; & in AD ad AH perpendiculari sit $AC = c$; sintque anguli HAR, HBS semirecti; tum utcunque ductâ rectâ GKξ ad AH perpendiculari (quæ ipsam BS secet in ξ; sit AG . AC :: AC . ξK; & per K intra *asymptotos* VD, VS describatur *hyperbola* KYHK; sint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

Not.

1. Curvæ HLλ, HMμ, HNν ad decimam seriem pertinent; reliquæ CLH, AMH, ANH ad undecimam.

2. Curva HLλ est *hyperbola æquilatera*, & curva CLH *circularis circumferentiæ* pars; utriusque commune centrum est O, ipsam AB bisecans (unde $AH = \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : - \frac{b}{2}$)

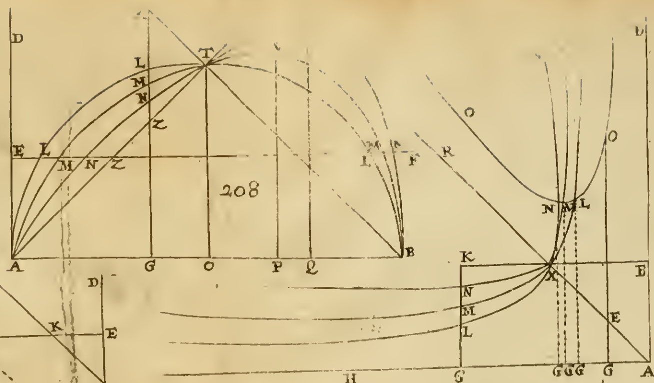
3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

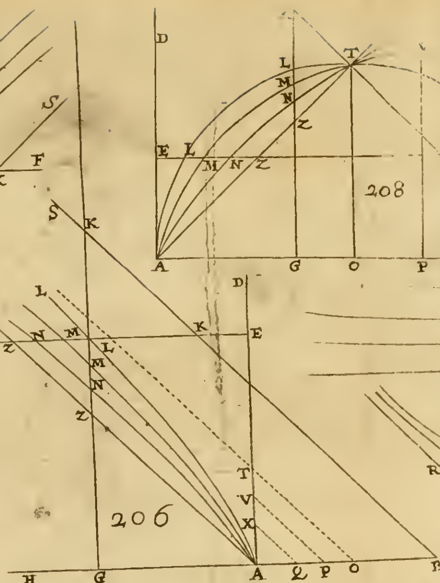
4. $A\varphi = \frac{cc}{b}$; & $A\psi = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : - \frac{b}{4}$; & ordinentur φY, ψX; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata AC est maxima; sin AP $= \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : - \frac{b}{3}$; & à P ad curvam AMH ordinetur Pγ, hæc maxima erit; item si $AQ = \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : - \frac{3b}{8}$; & à

Q

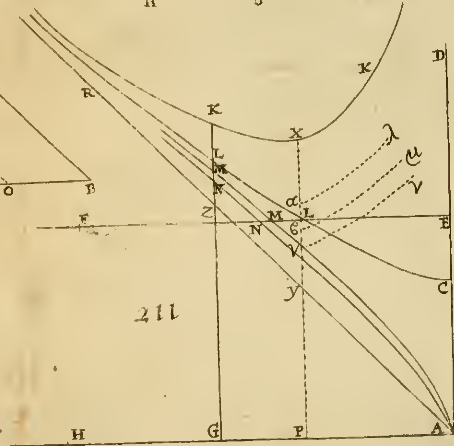
207





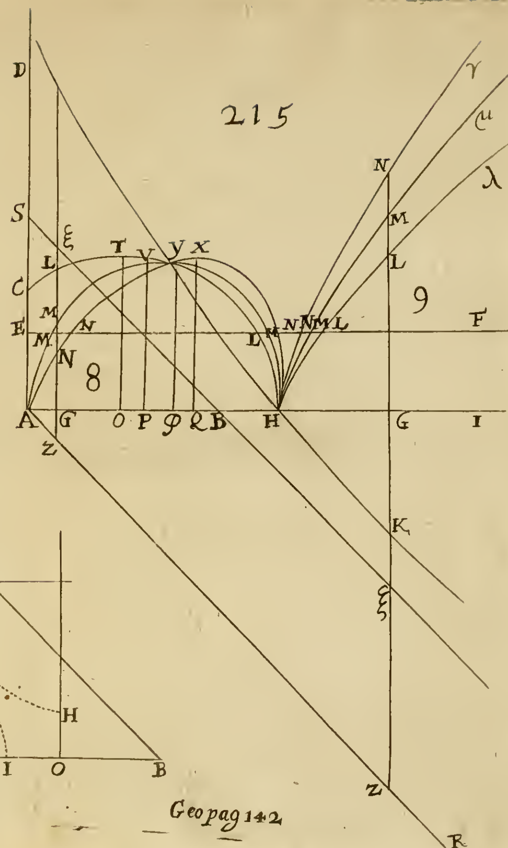
209

210



213

214



11

Croß ſculpſit

Geo pag 142



F

Q ad curvam ANH ordinetur Qδ, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad ſeriem octavam ſunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa - ba + cc = nn.$$

$$a^3 - baa + cca = n^3.$$

$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$

$$ba - aa - cc = nn.$$

$$baa - a^3 - cca = n^3.$$

$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit AB = b; & AC = c; & angulus ABS ſemireꝰctus, & Gξ ad AB utcunque perpendicularis, & AG . AC :: AC . ξK; & KHKIK *hyperbola aſymptotis* SA, SB deſcripta; denuò curvæ CLHLILλ, AMHMIMμ, ANHNINν tales ſint, ut inter AG, GK ſit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH, atque curvæ ILλ, IMμ, INν ad ſeriem duodecimam ſpectant, verùm intermediæ curvæ HLI, HMI, HNI ad decimam tertiam.

2. Curvæ CLH, ILλ ſunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam AB biſecans) & *ſemiaxis* OH (vel OI) = $\sqrt{}$ AOq. — ACq reliquæ tales ſunt, quales figura monſtrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI est *semicirculus*; reliquas itidem ostentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$; $A\psi = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, ψX, φY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (si $b \sqsupset \sqrt{8cc}$, deerunt *nodi* X, Y; si $b = \sqrt{8cc}$; ii coalescent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* est ipsa AC; sin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item si $AQ = \frac{3}{8}b - \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* est ipsa OT; sin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item si $Aq = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoscentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam seriem animadversa sunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, semper unam radicem haberi; in decima tertia verò subinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem constant posito fore $\frac{b}{2} \sqsubset c$; at si $\frac{b}{2} = c$; evanescet Series decima tertia; coalescent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \sqsupset c$; etiam evanescit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo casu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, semiaxem (ipsi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN
Fig. 218. ad infinitum procurrent, sic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam semper, & unicam radicem obtineant. Hæc suffecerit insinuâsse; quin & rem totam hactenus particulatim attigisse. Subnectemus autem notas quasdam magìs generales.

In

In *præmissas explicationes* animadvertatur generatim

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^5 + ba^4 + cca^3 - d^3aa - f^4a = n^5$; In recta indefinitè protensa HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo seriei propositam æquationem continentis gradu; nempe sit hic GK $= a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c semel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem à pura quæsitæ radicis potestate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO; per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet. Fig. 219.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attigimus suprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *subdititiæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exemplo* sit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa* - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa* + n^3 = 0$; & hujus, † utì suprà edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursus sit $a^3 - baa = n^3$, vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; substituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † *In Serie 3.*

3. Quinimo datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam falsis reperiendis inserviet, qualis ita determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota sit radix una, quæ vocetur f. Construatur æquatio planè similis propositæ, eásdemque *coefficientes* habens, tantum pro a substituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergò $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod semper fieri potest) per $a - f$; proveniet $aa \begin{matrix} +ba + bf \\ +fa + ff \end{matrix} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis locorum parium signis, ut ità fiat $aa \begin{matrix} -ba + bf \\ -fa + ff \end{matrix} = 0$; hujus æquationis

veræ radices propositæ falsas exhibent. Hic insuper modus æquationis propositæ, quatenus illa ex aliarum in se ductu provenit, constitutionem ostendit.

4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque serie ponendo (quovis in gradu seriei) fore $n=0$; ut in octava serie sit $ba-aa+cc=0$; adeóque $cc=aa-ba$, erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}+cc}\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima sit $aa-ba+cc=0$; unde $cc=ba-aa$; erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix maxima*; & $a\left(=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix minima*.

5. *Curvarum nodi*, vel *intersectiones* innotescunt, cujusvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a=n$; ut in octava Serie, ubi $ba-aa+cc=nn$, sit $a=n$; ergò $ba-aa+cc=aa$; vel $cc=2aa-ba$; vel $\frac{cc}{2}=aa-\frac{ba}{2}$; quare $a=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{bb}{16}+\frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa-ba+cc=nn=aa$; erit ideò $cc=ba$; ac inde $a=\frac{cc}{b}$.

6. *Ordinatæ maximæ, minimæque* variis nodis, methodísque passim notis investigantur; ego simul illas atque curvarum *tangentes* unâ operâ sic determino. Sit curva $A\gamma H$, ad Seriem undecimam pertinens, ejúsque gradum, cujus æquatio est $cca-baa-a^3=n^3$;
Fig. 220. posito γT curvam tangere, & γP ad AH ordinari, reperio (de supra monstratis) fore $PT=\frac{3n^3}{3aa+2ba-cc}$, tum considero, si ordinata $P\gamma$ sit maxima, fore tangentem ipsi HA parallelam, seu rectam PT esse infinitam; quare cùm sit $n^3=PT\times:3aa+2ba-cc$; & n sit finita, patet esse $3aa+2ba-cc=0$; vel $aa+\frac{2}{3}ba=\frac{cc}{3}$; adeóque $\sqrt{:\frac{bb}{9}+\frac{cc}{3}:}-\frac{b}{3}=a=AP$.

7. Adnoto demùm è *maximis* & *minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe si reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipsius AP in exemplo proximè superiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ a substituatur, si quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* construi nequit

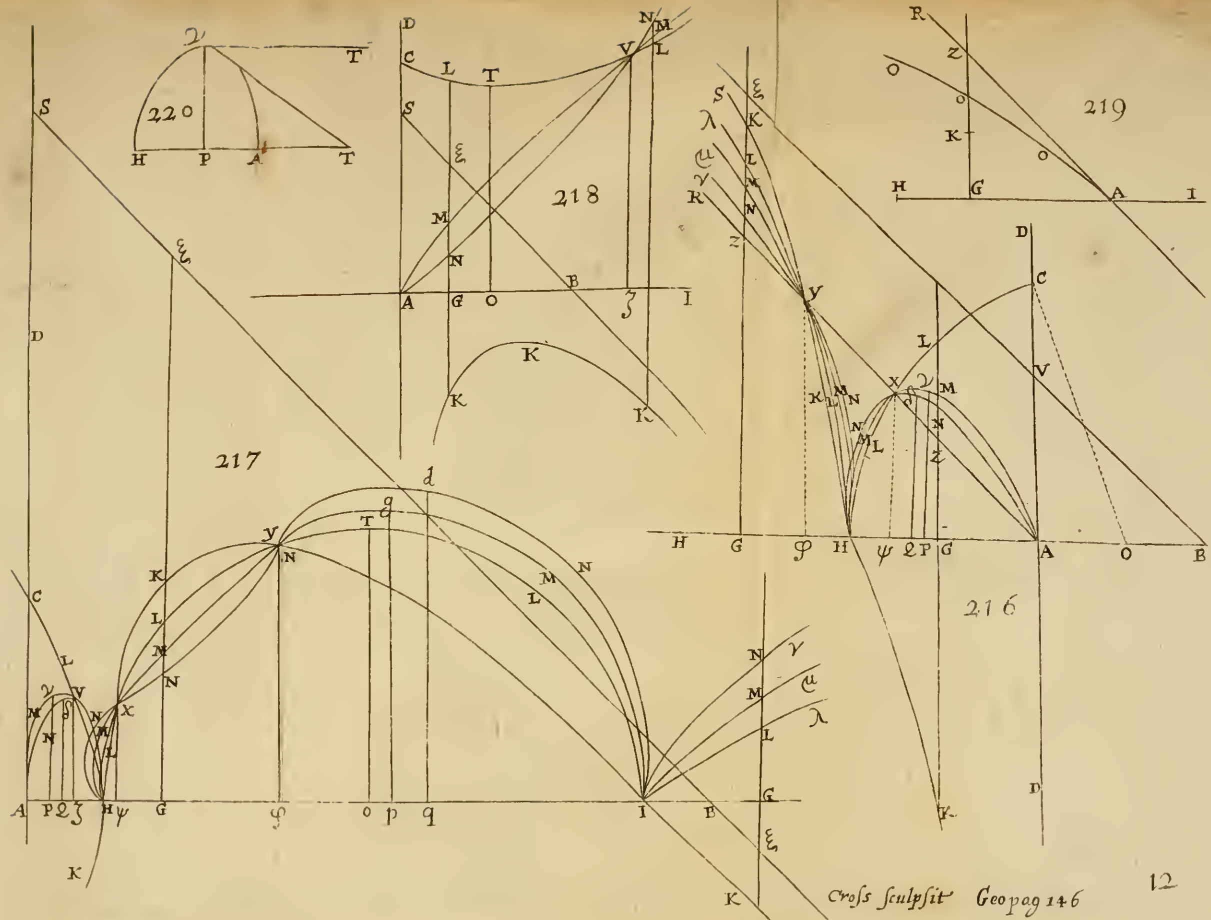
nequit, aut saltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & species præ se ferunt. Eadem *minimarum* est ratio; tantùm ibi proveniens *summa* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmissis. Hîc itaque subsisto.

Laus DEO Optimo Maximo.

FINIS.

ERRATA.

P*Ag.*. 5. *Lin.* 20. ad teſtatur, *lege* teſtatam facit. *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum. *p.* 14. *l.* 36. *leg.* plana. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur. *p.* 18. *l.* 32. *leg* à puncto B. *p.* 19. *l.* 4. *leg.* B D, G K. *p.* 22. 10. *leg.* VD multitudo cenſeri. *p.* 23. *l.* 7. *leg.* radius ad. *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24. *leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes (una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg.* tangant. *p.* 35. *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P. *p.* 37. *l.* 2. *leg.* diviſâ. *p.* 40. *l.* 4. *leg* arcus N H major eſt ipsâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* verſari. *p* 43. *l.* 15. *leg.* aliam H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig. 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.* $2fxy$. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52 *l.* 24. *leg.* Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* ſe interſecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* δ P. *p.* 58. *l.* 19. *leg.* F B F ipſi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctum. *p.* 62. *l.* 17. *leg.* K O ⊏ K A. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4. *leg.* στενολεχίαν. *p.* 67. *l.* 11. *leg* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg.* Q O q = Z q. *p.* 68. *l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* H T (*a*) ⊏ G A. *p.* 76. *l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76. *l.* 20. *leg.* tanget recta RFK. *p.* 78. *l.* 24. *leg.* infra. *p.* 79. *l.* 18. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31. *leg.* $\sqrt{VCZ\varphi} = CG$. *p.* 87 *l.* 14. *leg.* $D\psi^3 = \sqrt{\frac{32}{243}}$. *pag.* 91. *l.* 9. *leg.* in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96. *l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96 *l.* 22. *leg.* $AD = \frac{s}{t}CA$. *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam. *p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.* ſemi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis. *p.* 114. *l.* 22. *leg.* $\frac{PLQO}{2\ Rad.}$ *p.* 114. *l.* 26. *leg.* propoſitum. *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R. S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.* Fig. 184 *p.* 125. *l.* 4. *leg.* D M = D I. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11. *dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ *p.* 129. *l.* 13. emerget undecima Lect. *p.* 136. *l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* $n \sqsupset s$. à *p.* 105. ad *p.* 112. *l.* 1. *leg.* Lect. XII.



220
218
219
217
216
Cross sculpsit Geopag 146
12



UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, sed iis comprehensa spatia, de quibus apparet isthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\varpi}$, nec adponitur ἔκθεσις ulla, designantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.



Addenda Lectionibus Geometricis.

Vacuæ Pagellæ explendæ hæc adjici possunt: ὑστεραδικὰ vice, animadverto potuisse secundo Appendiculæ tertiæ Lectionis XII Problemati, pag. 122. Corollaria quædam adponi non injucunda, qualium adscribam unum & alterum.

Probl. I.

DEtur linea quæpiam AMB (cujus axis AD, basis DB) curva ANE designetur talis, ut ductâ liberè rectà MNG ad BD parallelâ, quæ ipsam ANE secet in N, sit curva AN æqualis ipsi GM. Fig. 221.

Curva ANE talis sit ut si MT curvam AMB, & NS curvam ANE tangant, sit $SG . GN :: TG . \sqrt{GMq - TGq}$, ipsa ANE Proposito faciet satis.

Probl. II.

Iisdem quoad cætera Suppositis, & constitutis; curva ANE jam talis esse debeat, ut curva AN semper æquetur interceptæ rectæ NM.

Curva ANE jam talis sit, ut sit $SG . GN :: 2TG \times GM . GMq - TGq$; erit ANE curva quæ desideratur.

Probl. III.

Datur curva quæpiam DXX, cujus axis DA; reperiatur curva AMB proprietate talis, ut si liberè ducatur recta GXM ad ipsam AD perpendicularis, ponaturque SMT curvam AM tangere, sit MS æqualis ipsi GX. Fig. 222.

Liquet rationem TG ad TM (hoc est rationem GD ad MS, vel GX) dari; adeoque rationem TG ad GM quoque dari.

Inservit hoc superficiebus designandis, quarum in promptu sit dimensio, etenim (ductâ ME ad AD parallelâ) Superficies Solidi ex plani BME circa axem DB rotatu progeniti adæquat $\frac{\text{Periph}}{\text{Rad}} \times GDX$; ut habetur in 11ª Lectionis XII.

In Lect. XI. appendice, numero XXXIII. de Cycloide profertur Theorema quoddam, id quod ex hujusmodi generaliori Theoremate deduci potuisset.

Fig. 223. SIt AMB curva quælibet, cujus Axis AD, basis DB, sit item curva ANE talis, ut si arbitrariè ducatur PMN ad DBE parallela, positoque rectam TN curvam ANE tangere, sit TN parallela subtensæ AM; completo Rectangulo ADEG erit Spatium trilineum AEG æquale Segmento ADB.

Huic suppar Theorema tale est: Iisdem positis, si tam Segmentum ADB, quam Spatium AEG circa Axem AG convertantur; erit productum è Segmento ADB Solidum producti ex AEG duplum.

E tangentium porrò contemplatione suborta est methodus, per quam expedissimè plurima circa maximas quantitates Theoremata deducuntur; quæ certè si tempestivè se objecissent, digna censuissem quæ Lectionibus insererentur, ex iis indigitabo nonnulla.

Fig. 224. Sit curva quæpiam ALB, cujus Axis AD, basis DB; & huic parallelæ LG, $\lambda\gamma$; item LT curvam tangat.

Theor. I.

Sit m numerus quicunque, potestates exponens; si ponatur $DG^{m-1} \times TG = GL^{m}$, erit $DG^{m} + GL^{m}$ maximum, seu majus quam $D\gamma^{m} + \gamma\lambda^{m}$.

Theor. II.

Itidem sumpto numero m, si ponatur $BL^{m-1} \times TL = GL^{m}$; erit $GL^{m} + BL^{m}$ maximum seu majus quam $\gamma\lambda^{m} + B\lambda^{m}$.

Theor. III.

Sint numeri quilibet m, n; si ponatur $m \times TG = n \times DG$, erit $DG^{m} \times GL^{n}$ maximum, seu majus quam $D\gamma^{m} \times \gamma\lambda^{n}$.

Theor.

Theor. IV.

Quod ſi ponatur $m \times TL = n \times$ arc BL, erit $GL^{\underline{n}} \times BL^{\underline{m}}$ maximum, ſeu majus quàm $\gamma\lambda^{\underline{n}} \times B\lambda^{\underline{m}}$.

Theor. V.

Si fuerit $TG \times GL = DGLB$, erit $DGLB \times GL$ maximum, ſeu majus quàm $D\gamma\lambda B \times \gamma\lambda$.

Theor. VI.

Sin $TG \times GL = 2\,DGLB$, erit $GL \times \sqrt{DGLB}$ maximum, ſeu majus quàm $\gamma\lambda \times \sqrt{D\gamma\lambda B}$.

Haud difficili negotio, cum hæc demonſtrantur, tum ejuſmodi complura deprehenduntur.

Ad illa verò ſuccinctius comprobanda deſervire poſſunt hujuſmodi Theoremata.

Sint duæ curvæ AGB, DHC quarum communis axis AD, ſed ordinatæ inverſo ſitu increſcant ab A ad DB, decreſcant à D ad AC; ad ordinatæ verò communis GEH terminos, recta GS curvam AGB, & recta HT curvam DHC contingant. Fig. 225.

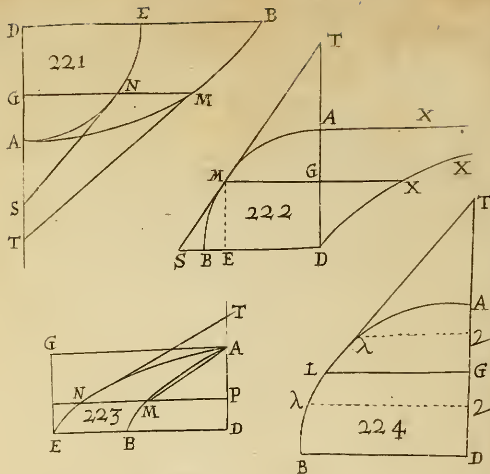
I. Si recta HT rectæ GS parallela ſit, erit GEH maxima ordinatarum in continuum jacentium ſumma.

Nam utcunque ducta $OKFLP$ ad GEH parallela (quæ Lineas ſecet ut cernis) erit $GH = QP \sqsubset KL$.

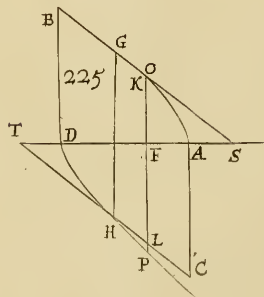
Not. Verum hoc, ſi curvarum partes concavæ axi obverſæ jaceant, aliàs GEH erit minima.

II. Si $ES = ET$, erit rectangulum ex EG, EH maximum: Nam ob $SE.SF :: EG.FO$, & $TE.TF :: EH.FP$; erit $SE \times TE . SF \times TF :: EG \times EH . FO \times FP$, itaque cum ſit $SE \times TE \sqsubset SF \times TF$, erit $EG \times EH \sqsubset FO \times FP$.

FINIS.



D
E
B
221
N
G
M
A
S
T
T
A
X
M
G
X
X
222
S
B
E
D
T
A
G
N
P
223
M
E
B
D
T
A
λ
2
L
G
λ
2
224
B
D



B
G
O
225
K
T
D
F
A
S
H
L
P
C

Geom: pag: 149

